

מערכות דינמיות

הנדסת אוירונאוטיקה וחלל, טכניון

סיכומי הרצאות - אביב תשע"ד

עריכה: ברק אור

תוכן עניינים

3-8	1. מודל מתמטי, התמרת לפס וקונבולציה
9-13	2. פונקציית התמסורת, תגובת תדר, פאזה והגבר
14-16	3. מערכות NMP
17-21	4. תגובת מערכת
22-24	5. דיאגרמות זרימה
25-30	6. לינאריזציה, המצב הנומינלי
31-40	7. ערכים עצמיים, קטבים ויציבות



מודל מתמטי

המערכת המתוארת משמאל הינה המערכת האמיתית. אנו רוצים לדעת מהו תדר התהודה שלה. לשם כך נניח הנחות ונפשט את המערכת:

הנחות ופישוטים	בבעיה
הזנחת תופעות מסדר גודל קטן מזה של התופעה הדומיננטית	הזנחת קפיציות
החלפת אלמנטים מפולגים מקובצים	ריכוז מסות במרכזי הכובד
הנחת לינאריות	חוק הוק
פרמטרים קבועים	שיכוך לא משתנה עם הטמפרטורה
הזנחת אי-ודאות	בתהליך היצור קיים אי-ודאות עבור תכונות החלק

נבנה מודל מתמטי של המערכת:

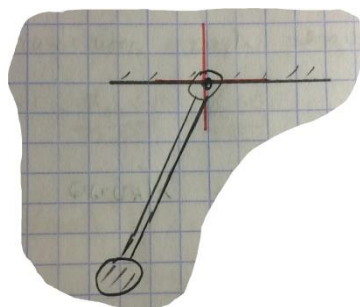
-רושמים את משוואות המערכת (משוואות התנועה)

-פישוטים נוספים

-מודל מתמטי של המערכת:

-פיתרון משוואות

-חקירת המשוואות



תרגיל 1.1

מחפשים את תדר התנודות של המטוטלת משמאל:

הנחות ופישוטים:

1. פרמטרים מקובצים: מטוטלת מתמטית-למיתר אין מסה.

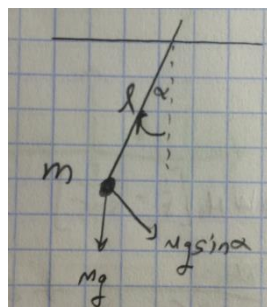
2. אין חיכוך בציר ובכלל במגע עם האויר.

3. לכבל אין גמישות

4. לכבל אין מסה

5. g קבוע

מודלים:



$$-mg \cdot \sin \alpha \cdot l = m \cdot l^2 \ddot{\alpha}$$

$$mg \cdot \sin \alpha \cdot l + m \cdot l^2 \ddot{\alpha} = 0$$

$$l \ddot{\alpha} + g \cdot \sin \alpha = 0$$

קיבלנו מד"ר לא לינארית.

נניח זוויות קטנות:

$$\sin \alpha \sim \alpha$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \cdot \alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \cdot \alpha = 0$$

קיבלנו מתנד הרמוני נטול ריסון, כאשר $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

מערכת לינארית - היא מערכת שמתקיים בה עיקרון הסופרפוזיציה.

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \cdot \alpha = F(t)$$

נבדוק את עיקרון הסופרפוזיציה:

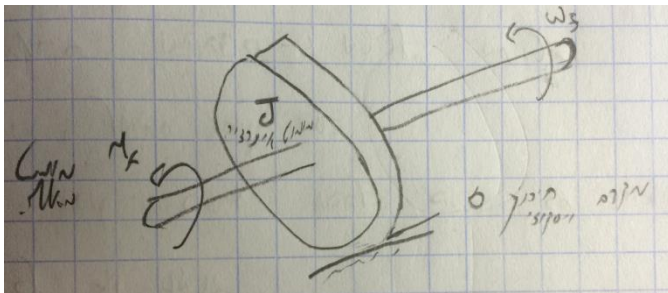
$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \cdot \alpha = f_1(t) \rightarrow \alpha_1(t)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \cdot \alpha = f_2(t) \rightarrow \alpha_2(t)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \cdot \alpha = f_1(t) + k \cdot f_2(t) \rightarrow \alpha_1(t) + k \cdot \alpha_2(t)$$

הגדרה: מערכת דינמית: מערכת פיסיקלית שהתיאור המתמטי שלה הוא מערכת משוואות דיפרנציאליות.

פתרון משוואה דיפרנציאלית באמצעות התמרת לפלס



$$M_f(t) = M_0(1 - e^{-\sigma_f t}) \cdot u(t) \quad \text{נתון:}$$

$$\omega(0) = \omega_0$$

דרוש: $\omega(t)$

פתרון:

נרשום את המודל המתמטי:

$$M_f(t) - b \cdot \omega = J \dot{\omega}$$

$$J \dot{\omega} + b \cdot \omega = M_f(t)$$

התמרת לפלס:

$$J(s\Omega(s) - \omega_0) + b \cdot \Omega(s) = M_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \sigma_f} \right]$$

$$\Omega(s) = \frac{M_0}{s(Js + b)} - \frac{M_0}{(Js + b)(s + \sigma_f)} + \frac{J\omega_0}{Js + b}$$

$$\Omega(s) = \frac{M_0/J}{s(s + b/J)} - \frac{M_0/J}{(s + b/J)(s + \sigma_f)} + \frac{\omega_0}{s + b/J}$$

$$\frac{M_0/J}{s(s+b/J)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+b/J}$$

$$\left. \frac{M_0/J}{s(s+b/J)} \times s \right|_{s=0} = \frac{M_0}{b}$$

$$\left. \frac{M_0/J}{s(s+b/J)} \times (s+b/J) \right|_{s=-b/J} = \frac{M_0/J}{-b/J} = -\frac{M_0}{b}$$

באותו אופן פותרים עבור שני הביטויים שנותרו במרחב לפלס, ומקבלים:

$$\Omega(s) = \frac{M_0/b}{s} - \frac{M_0/b}{s+b/J} - \frac{M_0/J}{\frac{-b/J+\sigma_f}{s+b/J}} - \frac{M_0/J}{\frac{-\sigma_f+b/J}{s+\sigma_f}} + \frac{\omega_0}{s+b/J}$$

נחזור למרחב הזמן:

$$\omega(t) = \left\{ \frac{M_0}{b} + \left[\omega_0 + \frac{M_0/J}{b/J - \sigma_f} - \frac{M_0}{b} \right] e^{-b/J t} + \frac{M_0/J}{\sigma_f - b/J} e^{\sigma_f t} \right\} u(t)$$

התמרה הפוכה באמצעות פירוק לשברים חלקיים

נדגים עבור הביטוי הבא:

$$\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} = \frac{\phi_1(0)}{s} + \frac{\phi_{2,1}(-1)}{s+1} + \frac{\phi_{2,2}(-1)}{(s+1)^2} + \frac{\phi_3(-3)}{s+3}$$

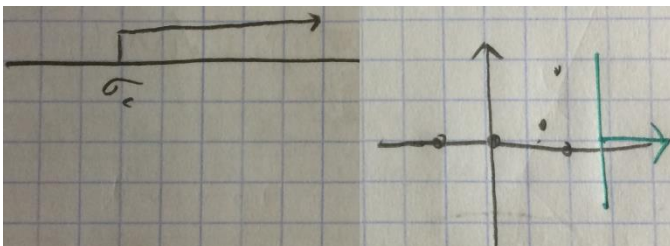
באופן כללי נשתמש בנוסחא הבאה (נוסחא 1.1):

$$\phi_{i,m_i-r(s_i)} = \frac{1}{r!} \frac{d^r}{ds^r} \left[F(s) \cdot (s+s_i)^{m_i} \right] \Big|_{s=-s_i}$$

$$r = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

תזכורת: התמרת לפלס: התמרת לפלס של פונקציה $f(t)$ הינה: $\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$. התמרת לפלס מתכנת רק

אם $\sigma \triangleq \text{Re}(s) > \sigma_c$ כאשר σ_c הוא החלק הממשי של הקוטב הימני ביותר של $F(s)$ (ההתמרה של $f(t)$, שנקרא σ_c abscissa of convergence).



תהינה $f(t)$ ונגזרתה הראשונה ניתנות להתמרת לפלס ויהיו כל קוטבי $sF(s)$ ב-OLHP (Open Left Hand Plane) של המישור המרוכב, אזי הגבול $t \rightarrow \infty$ של $f(t)$ שווה לגבול $s \rightarrow 0$ של $sF(s)$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

הוכחה:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

$s \rightarrow 0$ בשני האגפים

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

בתנאי שהגבולות קיימים:

$$L.H.S: \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$R.H.S: \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

מקבלים:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

□

1.2 תרגיל

נראה מתי $F(s) = \frac{1}{s-a}$ מתכנס.

$\sigma_c = a$, ההתמרה קיימת עבור $\text{Re}\{s\} > a$

ניקח $f(t) = e^{at}$:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{at-st} dt$$

האינטגרל מתכנס עבור $\text{Re}\{s\} > a$.

תרגיל 1.3

המסה בהתחלה נמצאת במנוחה.

ברגע $t = 0^+$ מפעילים כוח $f(t) = 1\text{N}$.

מהי התזוזה הסופית של המסה?

נרשום את משוואות התנועה:

$$\begin{cases} f(t) - kX - B\dot{X} = m\ddot{X} \\ m\ddot{X} + B\dot{X} + kX = f(t) \\ X(0) = 0, \dot{X}(0) = 0 \end{cases}$$

נעבור למישור לפלס:

$$ms^2 X(s) + sBX(s) + kX(s) = F(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{ms^2 + sB + k}$$

התזוזה הסופית הינה היציב "s.s (Steady State):

$$X_{s.s} = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{ms^2 + sB + k} = \frac{1}{k}$$

משפט הקונבולוציה

$$\left. \begin{matrix} f_1(t) \rightarrow F_1(s) \\ f_2(t) \rightarrow F_2(s) \end{matrix} \right\} \Rightarrow G(s) \triangleq F_1(s) \cdot F_2(s)$$

נרצה לדעת מהו $g(t)$. בקונבולוציה נעבוד במרחב הזמן.

$$g(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau \quad \text{משפט:}$$

הוכחה: נראה שמתקיים $F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = \int_{t=0}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt = \\ &= \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) u(t-\tau) e^{-st} dt d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} f_2(\tau) \underbrace{\int_{t=0}^{\infty} f_1(t-\tau) u(t-\tau) e^{-st} dt}_{\mathcal{L}[f_1(\tau)]} d\tau = \\ &= \int_{\tau=0}^{\infty} f_2(\tau) e^{-s\tau} F_1(s) d\tau = F_1(s) \underbrace{\int_{\tau=0}^{\infty} f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{\mathcal{L}[f_2(\tau)]} = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad \square \end{aligned}$$

בהוכחה היה מעבר ביניים :

$$\int_{\tau=0}^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^\infty f_1(t-\tau) f_2(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

תרגיל 1.4

נמצא את ההתמרה ההפוכה של $\frac{1}{s^2}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t)$$

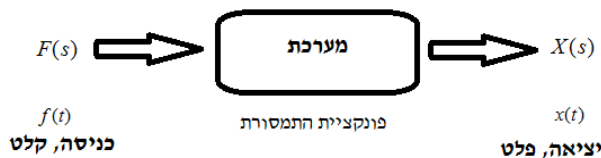
$$F_1(s) = \frac{1}{s}, f_1(t) = u(t)$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s}, f_2(t) = u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t u(t-\tau)u(\tau)d\tau = t \cdot u(t)$$

פונקציית תמסורת

הגדרה: פונקציית תמסורת של מערכת לינארית הינה היחס בין התמרות לפלס של היציאה והכניסה למערכת עבור תנאי התחלה אפס. במילים אחרות, היחס בין התמרות לפלס של התגובה המאולצת והכניסה. סימון: $H(s)$. $X(s) = H(s) \cdot F(s)$. בתחום הזמן: $x(t) = h(t) * f(t) = \int_0^t h(\tau) f(t-\tau) d\tau$



פונקציית הדלתא של דירק

$\delta(t-t_1)$ היא פונקציית פילוג המקיימת:

$$1. \quad \delta(t-t_1) = 0 \quad \text{לכל } t \neq t_1$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1) dt = 1$$

3. עבור $f(t)$ רציפה ב- t_1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1) f(t) dt = f(t_1)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_1) e^{-st} dt = e^{-st_1}$$

מקרה פרטי הוא $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

כלל ההזזה במישור לפלס

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} f(s)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \delta(s) = 1 = sF(s) = s \cdot \frac{1}{s} \rightarrow \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

הדלתא היא "נגזרת" של פונקציית מדרגה (לא באמת כי ל $u(t)$ אין נגזרת).

התגובה להלם

$$\delta(s) = 1 \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow X(s) \quad \text{בתחום } \delta$$

$$X(s) = H(s) \cdot \delta(s) = H(s) \cdot 1 \rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$$

$$f(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow x(t) \quad \text{בתחום הזמן}$$

$$x(t) = h(t) * f(t)$$

$\hat{=} h(t)$ תגובת ההלם של המערכת (Impulse response).

תגובת תדר

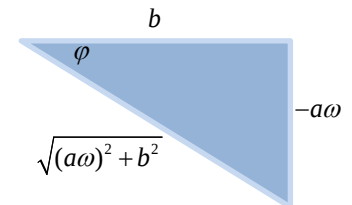
נקראת גם תגובת היענות.

$$\text{נסתכל על מקרה פרטי: } H(s) = \frac{1}{as+b}, \xrightarrow{A \sin(\omega t)} \boxed{H(s)} \rightarrow x(t) \quad \text{מצב מתמיד? } (t \rightarrow \infty)$$

$$\left. \begin{aligned} a\dot{x} + b\dot{x} &= A \sin(\omega t) \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$$

זהו הפתרון הפרטי. הפתרון ההומוגני הינו אקספוננציאלי דועך, שזו תגובת המעבר ולכן נזניח אותו. מהצבה למשוואה מקבלים את α, β . כך שהפתרון הוא:

$$x(t) = \frac{A}{\sqrt{(a\omega)^2 + b^2}} \left[\frac{b}{(a\omega)^2 + b^2} \sin(\omega t) - \frac{a\omega}{(a\omega)^2 + b^2} \cos(\omega t) \right]$$



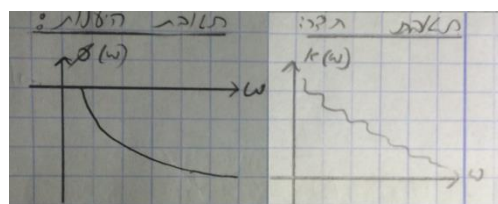
$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{b}{(a\omega)^2 + b^2} \\ \sin \varphi &= \frac{-a\omega}{(a\omega)^2 + b^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{A}{\sqrt{(a\omega)^2 + b^2}} \sin(\omega t + \varphi), \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{a\omega}{b}\right)$$

הערות:

1. המערכת מגיבה בתגובה סינusoאידלית בתדר זהה לתדר הכניסה (הסינusoאידלית)

2. היציאה מוסתת במופע (פאזה) φ ביחס לכניסה.

3. אמפליטודת היציאה מוגברת ביחס לאמפליטודת הכניסה $k = \frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{(a\omega)^2 + b^2}} = k(\omega)$



מציאת k, φ ללא פתרון המשוואה הדיפרנציאלית:

$$H(s) = \frac{1}{as+b}, H(j\omega) = \frac{1}{aj\omega+b} \rightarrow |H(j\omega)| = k(\omega), \angle H(j\omega) = \varphi(\omega)$$

משפט

נתונה מערכת יציבה (Linear Time Invariant) L.T.I, אזי כאשר הכניסה סינוסואידלית $X(t) = A \sin(\omega t)$, התגובה המאולצת של המערכת (התגובה במצב מתמיד) גם היא סינוסואידלית בעלת תדר $Y(t) = B \sin(\omega t)$

$$\cdot \frac{B}{A}(\omega) = \frac{|Y(t)|}{|X(t)|} = |H(j\omega)|, \phi(\omega) = \arg\{H(j\omega)\}$$

כאשר האמפליטודה והפאזה מקיימות

הוכחה:

$$X(t) = A \sin(\omega t) \rightarrow \mathcal{L}\{X(t)\} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} X(s)$$

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)^{m_1} \cdots (s+p_r)^{m_r} \cdots (s+p_n)^{m_n}} \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} =$$

$$\frac{a}{s+j\omega} + \frac{b}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+p_1} + \dots + \frac{b_{r,1}}{s+p_r} + \frac{b_{r,2}}{(s+p_r)^2} + \dots + \frac{b_{r,m}}{(s+p_r)^{m_r}} + \dots + \frac{b_n}{(s+p_n)^n}$$

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + be^{j\omega t} + b_1 e^{-p_1 t} + \dots + b_{r,1} e^{-p_r t} + b_{r,2} e^{-p_r t} + \dots + b_{r,m} t^{m-1} e^{-p_r t} + \dots + b_n t^{n-1} e^{-p_n t}$$

עבור $t \rightarrow \infty$ כל האקספוננטים דועכים ל-0, לכן במצב מתמיד:

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + be^{j\omega t}$$

למציאת a, b :

$$a = H(s) \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = \frac{AH(-j\omega)}{2j}$$

$$b = \dots = \frac{AH(j\omega)}{2j}$$

טענה

$$b = \bar{a}$$

$$H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)} \quad \text{צ"ל:}$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$H(s) = \frac{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_0}{d_m s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_0}$$

$$H(j\omega) = \frac{c_n j\omega^n + c_{n-1} j\omega^{n-1} + \dots + c_0}{d_m j\omega^m + d_{m-1} j\omega^{m-1} + \dots + d_0} = \frac{\operatorname{Re}\{N(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{N(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{D(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{D(j\omega)\}}$$

$\operatorname{Re}\{N(j\omega)\}$ מורכב מכל החזקות הזוגיות של s ב- $N(s)$

$\text{Im}\{N(j\omega)\}$ מורכב מכל החזקות האי-זוגיות של s ב- $N(s)$.

אם נציב $-j\omega$ במקום $j\omega$:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}\{N(-j\omega)\} &= \text{Re}\{N(j\omega)\} \\ \text{Im}\{N(-j\omega)\} &= -\text{Im}\{N(j\omega)\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H(-j\omega) = \frac{\text{Re}\{N(j\omega)\} - j \text{Im}\{N(j\omega)\}}{\text{Re}\{D(j\omega)\} - j \text{Im}\{D(j\omega)\}}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{H(j\omega)\}}{\text{Re}\{H(j\omega)\}}$$

מסקנה :

$$H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)} = |H(j\omega)| e^{-j\varphi}$$

$$a = -\frac{A|H(j\omega)| e^{-j\varphi}}{2j}$$

$$b = \frac{A|H(j\omega)| e^{j\varphi}}{2j}$$

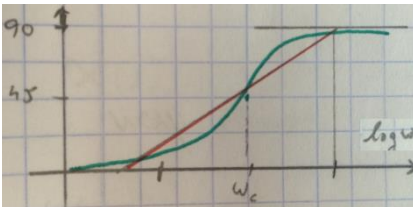
$$y(t) = A|H(j\omega)| \cdot \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j} \right] = y(t) = A|H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$$

מכאן :

$$\frac{B}{A} = |H(j\omega)|$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega))$$

צמד מרוכב



יצוג הפאזה : לקיחת קו ישר (באדום) היא תחת הנחת התנהגות סימטרית.

$$g(s) = \frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + 1$$

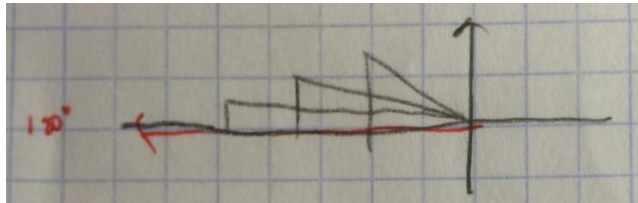
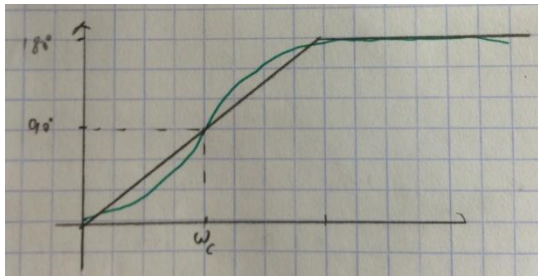
$$g(j\omega) = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0} + 1 = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j 2\xi \frac{\omega}{\omega_0}$$

נסתכל על ההתנהגויות האסימפטוטיות של ההגבר והפאזה.

נחשב את הפאזה :

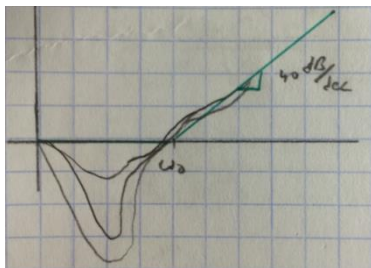
$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$$

$\varphi(\omega)$	ω
$\varphi(\omega) = 90^\circ$	$\omega = \omega_0$
$\varphi(\omega) \cong 0^\circ$	$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$
$\varphi(\omega) = 180^\circ$	$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$



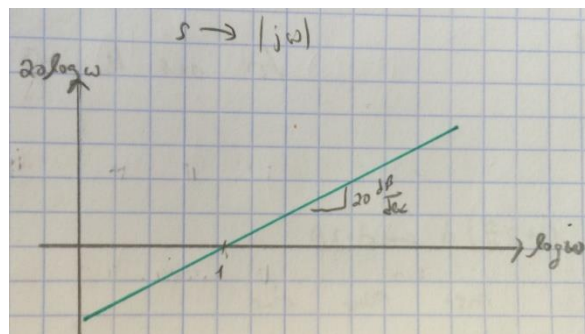
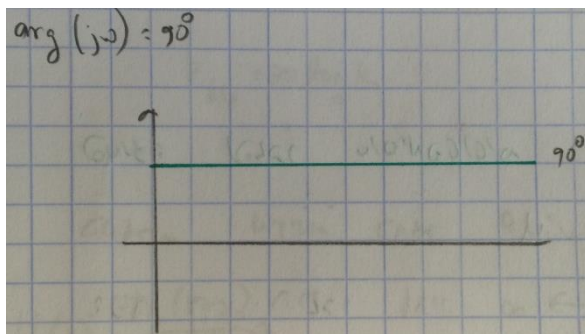
נחשב את ההגבר :

$$|g(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_0} \right| = 10 \log \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$



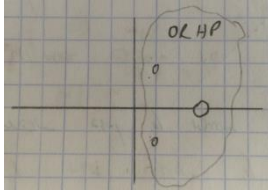
$ g(j\omega) _{dB}$	ω
$ g(j\omega) _{dB} = 20 \log(2\xi)$	$\omega = \omega_0$
$ g(j\omega) _{dB} = 20 \log(1) = 0$	$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$
$ g(j\omega) _{dB} = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) = 40 \log(\omega) - 40 \log(\omega_0)$	$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

אפס וקוטב בראשית



3. מערכות NMP

הגדרה: פונקציית תמסורת שאין לה אפסים ב-ORHP נקראת מינימום פאזה MP. כאלו בעלות אפסים ב-ORHP נקראות "לא מינימום פאזה" NMP.

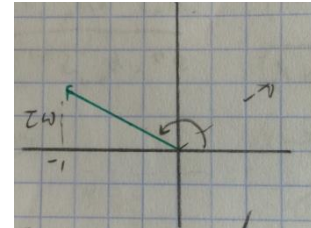


אפס NMP

$$s - z = z \left(\frac{1}{z} s - 1 \right)$$

$$s \rightarrow j\omega$$

$$z \left(\frac{1}{z} j\omega - 1 \right) = \underbrace{z \left(\frac{1}{z} j\omega - 1 \right)}_{\tau j\omega - 1}$$

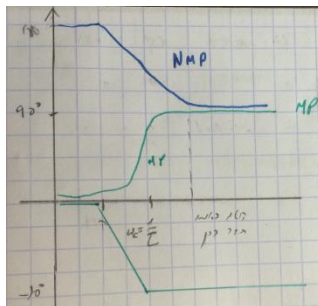


מבחינת הגודל נשאר זהה לגודל של אפס MP

$$\arg(-1 + j\tau\omega) = 180 - \arg(1 + j\tau\omega) \quad \text{פאזה:}$$

מסקנה: 1. להפוך את האפס לקוטב

2. להוסיף 180°



פאזה והגבר אסימפטוטים

במערכת מינימום פאזה MP:

שיפוע קו ההגבר עבור $\omega \rightarrow \infty$ הוא $-20(n_p - n_z)_{dB/dec}$. כאשר n_p הינו מספר הקטבים ו n_z מספר האפסים הכולל של האפסים מכל הסוגים.

$$\varphi(\infty) - \varphi(0) = -90(n_p - n_z) \quad \text{הפאזה שווה ל:}$$

במערכת NMP:

ההגבר זהה

$$\text{הפאזה שווה ל: } \varphi(\infty) - \varphi(0) = -90(n_p - n_z) - 180(n_z^{NMP}) \quad \text{מספר האפסים מסוג NMP}$$

התנהגות בזמן של מערכת NMP

למה 1: מקדמי הפולינום של פונקציות תמסורת MP רציונלית, יציבה ובעלת הגבר חופשי חיובית-אינם שליליים!

$$H(s) = k_0 \frac{\prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^m (s + p_j)} = \frac{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_0}{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_0}$$

מכפלות של מספרים חיוביים ולכן הכל חיובי.

למה 2: נעיין בפונקציית התמסורת $H(s) = \frac{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_0}{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_0}$. תהי הכניסה למערכת פונקציית

מדרגה ויהי k הסדר הנמוך ביותר של נגזרת אות היציאה שאיננה מתאפסת ב- $t=0$, כלומר $X^{(j)}(0) = 0 \forall j < k$, אזי $X^{(k)}(0) = \frac{A_n}{B_m}$.

הוכחה:

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_0}{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_0} \quad \text{יציאת המערכת:}$$

$$X^{(k)}(s) = s^{k-1} \cdot \frac{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_0}{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_0}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} X^{(k)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X^{(k)}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A_n s^{n+k} + A_{n-1} s^{n+k-1} + \dots + A_0 s^k}{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_0} =$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A_n s^{k-(m-n)} + \dots + A_0 s^{k-m}}{B_m + B_{m-1} s^{-1} + \dots + B_0 s^{-m}} = \frac{1}{B_m} \lim_{s \rightarrow \infty} [A_n s^{k-(m-n)} + \dots + A_0 s^{k-m}] =$$

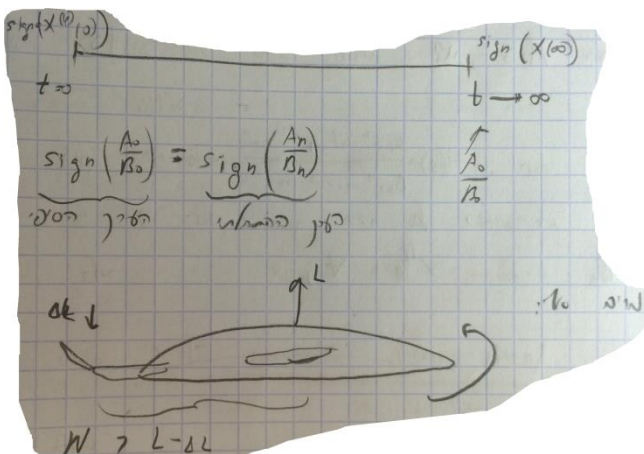
$$\frac{1}{B_m} \lim_{s \rightarrow \infty} \left[A_n s^{k-(m-n)} + A_{n-1} \frac{s^{k-(m-n)}}{s} + \dots + \frac{A_0 s^{k-m}}{s^n} \right]$$

יש גבול סופי רק עבור $k \leq m-n$. נפריד ל-2 מקרים:

$$\lim_{t \rightarrow 0} X^{(k)}(t) = 0 \quad \text{אם } k < m-n$$

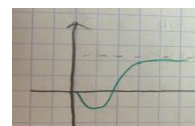
$$\square \lim_{t \rightarrow 0} X^{(k)}(0) = \frac{A_n}{B_m} \quad \text{ואם } k = m-n$$

משפט: נעיין בפונקציית תמסורת רציונלית יציבה, MP, בעלת הגבר חופשי חיובי. אזי עבור כניסת מדרגה, הנגזרת הראשונה של אות היציאה אשר איננה מתאפסת בראשית (ב- $t=0$), סימנה כסימן הערך הסופי של אות היציאה.



משמאל: דוגמא למטוס מרים אף. תחילה מקבלים

ירידת אף ואז מתייצבים באופן הרצוי.

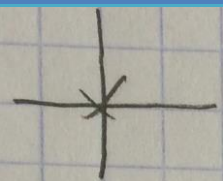
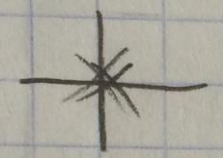
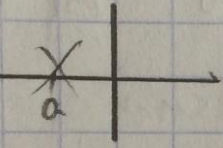
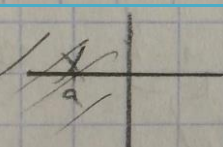
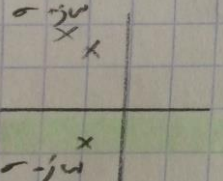
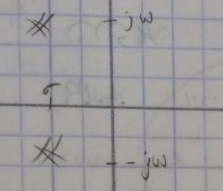
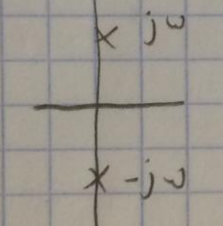
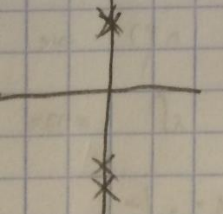


הוכחה:

נניח $H(s)$ היא MP ו- $H'(s)$ היא NMP, $\alpha > 0$

$$H'(s) \triangleq (s - \alpha)H(s) = \frac{(s - \alpha)[A_n s^n + \dots + A_0]}{B_m s^m + \dots + B_0} = \frac{A_n s^{n+1} + \dots - \alpha A_0}{B_m s^m + \dots + B_0}$$

$$\square - \frac{\alpha A_0}{B_0} \quad \text{מהמשפט הקודם נשארים בגבול עם}$$

פתרון זמני	מרחב לפלס	תיאור
$x(t) = Au(t) + ..$	$\frac{1}{s}$	
$x(t) = tAu(t) + ..$	$\frac{1}{s^2}$	
$x(t) = Ae^{-at}u(t) + ..$	$\frac{1}{s+a}$	
$x(t) = (A+Bt)e^{-at}u(t) + ..$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	
$x(t) = Ae^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)u(t) + ..$	$\frac{F(s)}{s^2 + 2\sigma s + (\sigma^2 + \omega^2)}$	
$x(t) = (A+Bt)e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)u(t) + ..$		
$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)u(t) + ..$		
$x(t) = (A+Bt) \cos(\omega t + \varphi)u(t) + ..$		

במציאות: אף פעם לא ניתן לדעת בדיוק איפה הקוטב נמצא! אין לנו דרך מדויקת כדי לקבל נתונים של קפיצים ומסות.

תגובה של מערכת במונחים של לפלס:

$$X(s) = \frac{s + \alpha}{(s+b)(s-d)} = \frac{A}{s+b} + \frac{B}{s-d} = \frac{b-\alpha}{b+d} \cdot \frac{1}{s+b} + \frac{d+\alpha}{b+d} \cdot \frac{1}{s-d}$$

$$x(t) = \frac{b-\alpha}{b+d} \cdot e^{-bt} + \frac{d+\alpha}{b+d} \cdot e^{dt}$$

e^{dt} , e^{-bt} קובעים את אופי התגובה.

אפסים לא קובעים את אופי התגובה, אבל כן קובעים כמה המוד משתתף בתגובה $\alpha = -d + \varepsilon \rightarrow \frac{\varepsilon}{b+d} \cdot e^{dt}, \tau = \frac{1}{d}$

אין לצמצם קוטב עם אפס, לעולם!

כשיש קטבים לא יציבים נדאג ליצב אותם.

תגובת מערכת מסדר 1

$$\frac{1}{s} \rightarrow \boxed{\frac{A}{s+a}} \rightarrow X(s) \Rightarrow x(t) = \frac{A}{a} [1 - e^{-at}]$$

התגובה לכניסת מדרגה:

תגובת מערכת מסדר 2

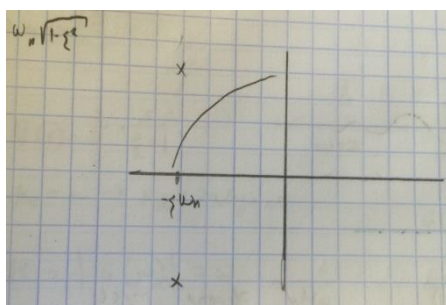
$$\frac{1}{s} \rightarrow \boxed{\frac{Bs+C}{s^2+2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \rightarrow X(s)$$

החלק הממשי של הקטבים יקבע אם מתכנס או מתבדר. 2 בשמאלי: מתכנס. 2 בימני: מתבדר.

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = \omega_n \left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right]$$

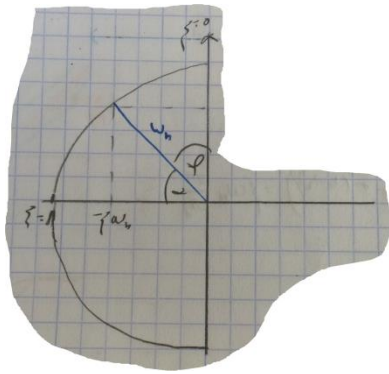
נפריד ל-3 מקרים:

$ \zeta > 1$	2 מערכות מסדר ראשון, כי יש זוג קטבים ממשיים
$ \zeta = 1$	2 מערכות מסדר ראשון, כי יש זוג קטבים ממשיים- זהו למעשה קוטב כפול
$0 < \zeta < 1$	$s_{1,2} = \omega_n \left[-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2} \right]$



כשמסתכלים על $\zeta = 0$ מקבלים מתנד הרמוני, לא מרוסן. $|s_{1,2}| = \omega_n$

כלומר המקום הגיאומטרי של השורשים הוא מעגל.



התדר הטבעי המרוסן הינו $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$,

כאשר ω_n הינו התדר הטבעי הבלתי מרוסן. $\cos \alpha = \zeta$

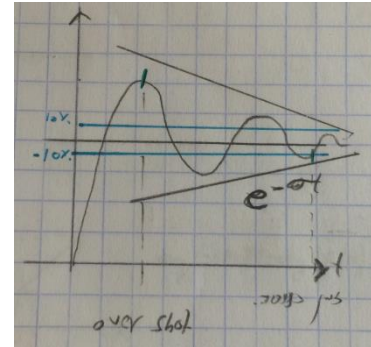
תגובת הזמן של מערכת מסדר שני

התגובה למדרגה:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

$$\sigma = \zeta \omega_n$$

$$\tan \varphi = \frac{-\zeta}{\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$



δ -Log Decrement

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p = e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

$$t_i = \frac{\pi}{\omega_d} (2i + 1), i = 0, 1, \dots$$

$$t_1 = t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{T}{2}$$

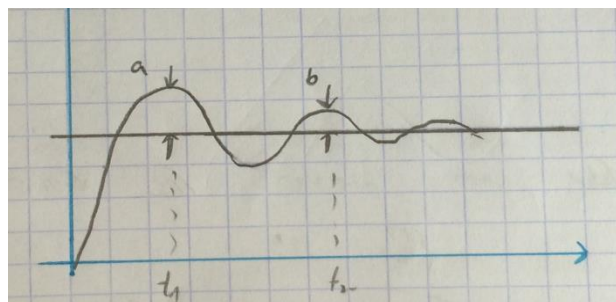
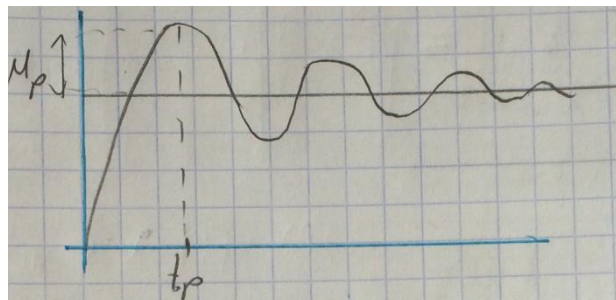
$$t_2 = \frac{3\pi}{\omega_d} = \frac{3T}{2}$$

$$\delta \triangleq \ln \left| \frac{y(t_1) - 1}{y(t_2) - 1} \right| = \ln \left| \frac{a}{b} \right|$$

$$\delta = \ln \frac{e^{-\sigma t_1}}{e^{-\sigma t_2}} = \ln(e^{-\sigma(t_1 - t_2)}) = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\delta = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot 2\pi$$

$$\zeta = \left[\left(\frac{2\pi}{\delta} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}}$$



כתיב מטריצי

משפט: לכל מערכת של משוואות דיפרנציאליות לינאריות עם מספר כלשהו של משוואות ומסדר כלשהו ניתן לרשום מטריצות כמשוואה לינארית מסדר ראשון כך ש: $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$

כאשר $\underline{x}$: וקטור המצב של המערכת State Vector

$\underline{u}$: וקטור הכניסה Input

תרגיל 4.2

נתונה המד"ר: $m\ddot{y} + B\dot{y} + ky = u_1(t) + 7u_2(t)$. נגדיר משתני מצב: $x_1 \triangleq y, x_2 \triangleq \dot{y}$. וקטור המצב הינו:

$$\underline{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

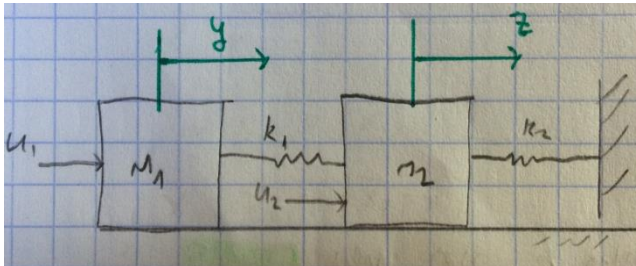
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{B}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u_1 + \frac{7}{m}u_2$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{7}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

תרגיל 4.3

שני משתני מצב לכל משוואה.



נכתוב משוואות:

$$\left. \begin{aligned} u_1 - k_1(y - z) - B_1\dot{y} &= m_1\ddot{y} \\ u_2 + k_1(y - z) - B_2\dot{z} - k_2z &= m_2\ddot{z} \end{aligned} \right\}$$

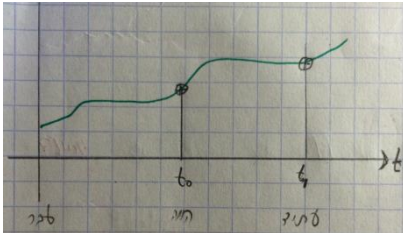
$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{B_1}{m_1}\dot{y} - \frac{k_1}{m_1}y + \frac{k_1}{m_1}z + \frac{1}{m_1}u_1 \\ \ddot{z} &= -\frac{B_2}{m_2}\dot{z} - \frac{k_1+k_2}{m_2}z + \frac{k_1}{m_2}y + \frac{1}{m_2}u_2 \end{aligned} \right\}$$

נגדיר משתני מצב:

$$\begin{aligned} x_1 &\triangleq y & \dot{x}_1 &\triangleq x_2 \\ x_2 &\triangleq \dot{y} & x_3 &\triangleq z \\ x_3 &\triangleq z & \dot{x}_3 &\triangleq x_4 \\ x_4 &\triangleq \dot{z} & \dot{x}_4 &\triangleq \ddot{z} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{B_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{B_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

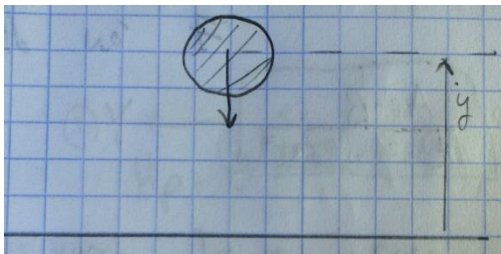
באופן כללי הצורה הינה: $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + b\underline{u}$. A- מטריצת הדינמיקה של המערכת. B- מטריצת הבקרה. היה אפשר להגדיר את המצב באינסוף דרכים



מצב- המצב הינו סיכום של תיאור המערכת בזמן נתון. ידע של המצב בזמן t_0 פלוס ידע על הכניסות למערכת אחרי t_0 מאפשרים את חישוב מצב המערכת בזמן $t > t_0$. אם רק מב המערכת מעניין אותנו, אין חשיבות לשאלה איך הגענו למצב ב- t_0 . כלומר המצב ב- t_0 מהווה סיכום של היסטוריות המערכת עד t_0 . מסקנה: ידע של המצב הנוכחי מאפשר הפרדה חדה בין העבר לעתיד.

הגדרה- משתני המצב של המערכת הם הקבוצה המינימאלית של פרמטרים המתארים באופן מושלם את מצב המערכת במובן הבא: אם עבור זמן t_0 ערכי משתני המצב $x_i(t_0)$ ידועים, אזי פלט המערכת $y(t_1)$ והערכים $x_i(t_0)$ ניתנים לחישוב באופן יחיד עבור כל $t_1 > t_0$ בהנחה שהכניסה $u(t)$ ידועה.

תרגיל 4.4



משוואת התנועה: $\ddot{y} = -g$

כניסה: g . יציאה: y .

$$\dot{y} = -g(t - t_0) + \dot{y}(t_0)$$

$$y(t) = -g \frac{(t - t_0)^2}{2} + \dot{y}(t_0) \cdot (t - t_0) + y(t_0)$$

האם y הוא מצב? לא. (= האם כשידוע y ב- t_0 נדע לתאר את y אחרי t_0). באותו אופן גם $\dot{y}$ אינו מצב.

הצגה במרחב הפאזה

$$\begin{aligned} x_1 &\triangleq x \\ x_2 &= \dot{x}_1 = (\dot{x}) \\ x_3 &= \dot{x}_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} \end{aligned}$$

נעיין במשוואה: $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = u(t)$. נגדיר משתני מצב:

נקבל את משוואת הפלט:

$$x^{(n)} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u(t) = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u(t)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{companionMatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) = \underbrace{[1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]}_C \underline{x}$$

כאשר C הינה מטריצת המדידה.

5.1 תרגיל

$$T(s) = \frac{s+3}{s^3+9s^2+24s+20}$$

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = T(s)$$

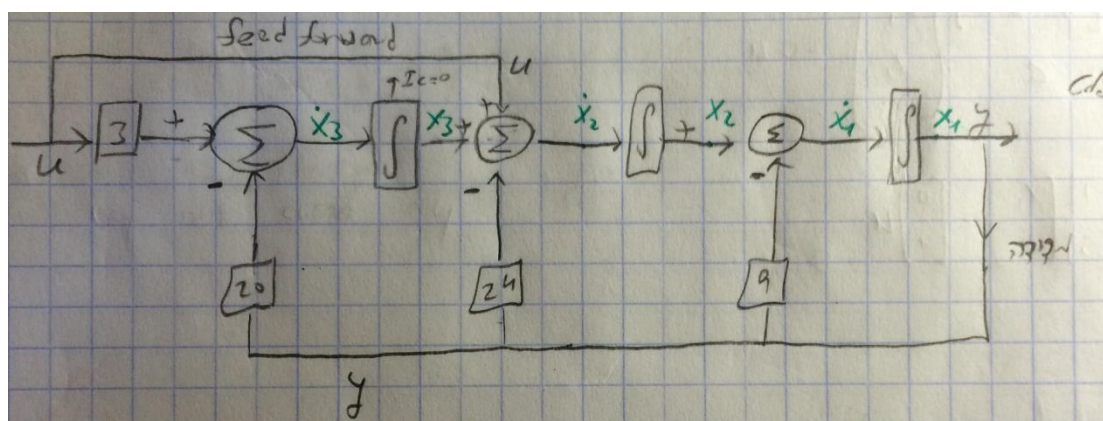
$$\ddot{y} = -9\ddot{y} - 24\dot{y} - 20y + \dot{u} + 3u$$

$$\ddot{y} = -9\dot{y} - 24y + u + \int (-20y + 3u) d\tau_1$$

$$\dot{y} = -9y + \int [-24y + u + \int (-20y + 3u) d\tau_1] d\tau_2$$

$$y = \left\{ -9y + \int [-24y + u + \int (-20y + 3u) d\tau_1] d\tau_2 \right\} d\tau_3$$

נשרטט דיאגרמת זרימה (דיאגרמת סימולציה):



נגדיר משתני מצב: כל פלט של אינטגרטור הוא משתנה מצב:

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = x_2 - 9x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_3 - 24x_1 + u$$

$$\dot{x}_3 = -20x_1 + 3u$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -24 & 0 & 1 \\ -20 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} u$$

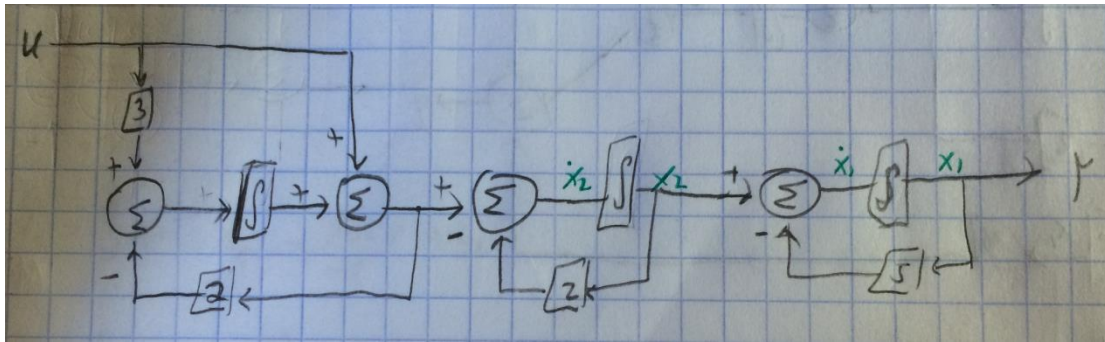
$$y = [1 \ 0 \ 0] \underline{x}$$

דרך נוספת לפתרון:

$$T(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2(s+5)} = \frac{s+3}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+5}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+5} \left[\frac{1}{s+2} \left(\frac{s+3}{s+2} u(s) \right) \right]$$

$$u(s) \rightarrow \boxed{\frac{s+3}{s+2}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{s+2}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{s+5}} \rightarrow Y(s)$$



$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 + u$$

$$\dot{x}_3 = -2(x_3 + u) + 3u = -2x_3 + u$$

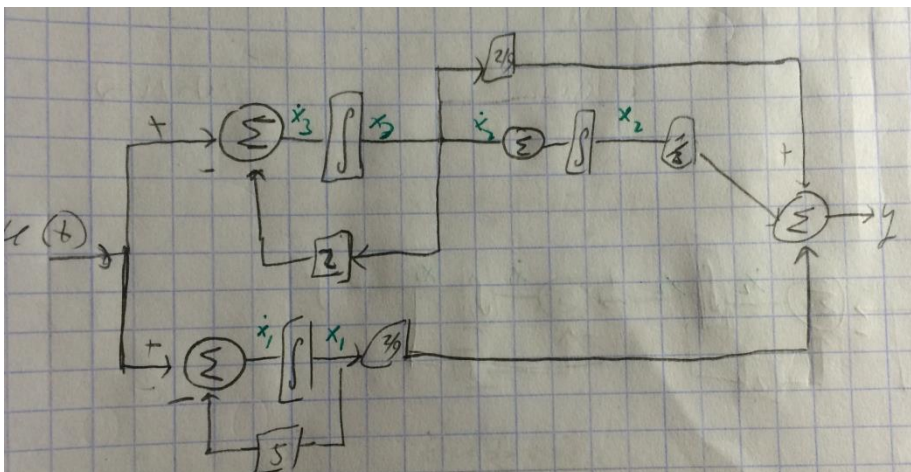
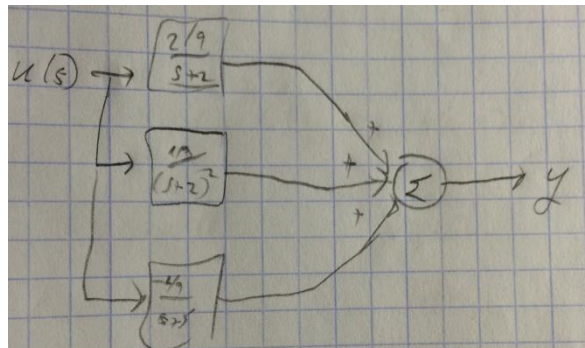
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \underline{x}$$

יש לנו הצגות שונות במרחב המצב ובכל את היחס בין הקלט לפלט הינו יחס זהה. דרך פונקציית התמסורת לא רואים את הדינמיקה של המערכת.

דרך נוספת: פירוק לשברים חלקיים:

$$T(s) = \frac{2/9}{s+2} + \frac{1/3}{(s+2)^2} + \frac{-2/9}{s+5}$$



$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -2/9 & 1/3 & 2/9 \end{bmatrix} \underline{x}$$

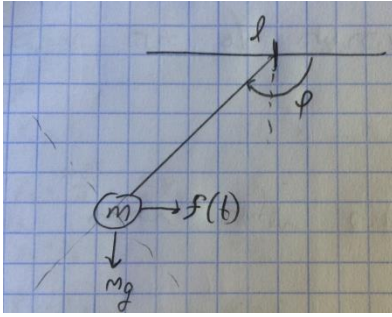
במרחב המצב יש שרירותיות.

יצאנו מאותה פונקציית תמסורת ולכן היא נשמרה.

הערכים העצמיים מופיעים במטריצה משולשת עליונה.

6.1 תרגיל

מטוטלת:

נרשום את משוואת התנועה ללא כל הנחה על φ .

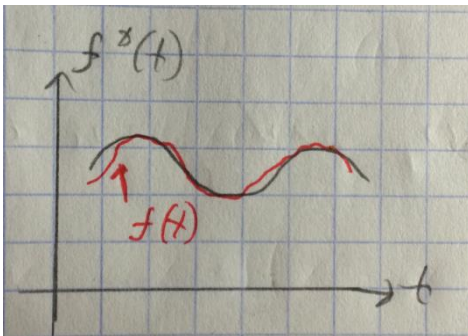
$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \cos \varphi = -\frac{f}{ml} \sin \varphi$$

נגדיר משתני פאזה

$$\begin{aligned} x_1 &\triangleq \varphi \\ x_2 &\triangleq \dot{\varphi} = \dot{x}_1 \\ f_1 : \dot{x}_1 &= x_2 \\ f_2 : \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \cos x_1 - \frac{f}{ml} \sin x_1 \end{aligned}$$

הצורה הקונונית של מערכת לא לינארית:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \\ \dot{x}_1 &= f_1(x, u, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, u, t) \end{aligned}$$

נבחר ערעור נומינלי $f^*(t)$ נפתור עבור $\varphi^*(t)$, כאשר כניסה מסויימת ידועה היטב.נקבל צמד $(f^*(t), \varphi^*(t))$ מקיים את המשוואה הדיפרנציאלית.

$$\ddot{\varphi}^*(t) - \frac{g}{l} \cos \varphi^*(t) = -\frac{f^*(t)}{ml} \sin \varphi^*(t)$$

כל עוד f אמיתי שונה מ- f^* לא בהרבה... אנחנו נניח ש $f(t)$ "קרוב מספיק" ל- $f^*(t)$ ונגדיר:

$$\delta f(t) \triangleq f(t) - f^*(t) \quad \text{הפרה ב- } f$$

נדרוש $\|\delta f(t)\|$ קטן מספיק (נגדיר בהמשך) לכל t שמעניין אותנו. $f(t) = f^*(t) + \delta f(t)$.באופן דומה נגדיר $\delta \varphi(t) \triangleq \varphi(t) - \varphi^*(t)$ (הפרה ב- φ), ולכן: $\varphi(t) = \varphi^*(t) + \delta \varphi(t)$.הנחה: δf קטנה, אזי גם $\delta \varphi$ קטנה לכל t באינטרוול המעניין.נציב את הצמד $(f^*(t), \varphi^*(t))$ במשוואה:

$$\frac{d^2}{dt^2} [\varphi^* + \delta \varphi] - \frac{g}{l} \cos [\varphi^* + \delta \varphi] = -\frac{[f^* + \delta f]}{ml} \sin [\varphi^* + \delta \varphi]$$

קירוב טיילור מסדר ראשון (כאשר בדרך מצמצמים את הפתרון הנומינלי):

$$\cos[\varphi^* + \delta\varphi] \cong \cos \varphi^* - \sin \varphi^* \cdot \delta\varphi$$

$$\begin{aligned} [f^* + \delta f] \cdot \sin[\varphi^* + \delta\varphi] &= f^* \sin \varphi^* + \frac{\partial}{\partial f} [f \sin \varphi] \Big|_{\varphi^*, f^*} \cdot \delta f + \frac{\partial}{\partial \varphi} [f \sin \varphi] \Big|_{\varphi^*, f^*} \cdot \delta\varphi + \dots = \\ &= f^* \sin \varphi^* + \sin \varphi^* \delta f + f^* \cos \varphi^* \delta\varphi \end{aligned}$$

$$\cancel{\ddot{\varphi}^*} + \cancel{\delta\ddot{\varphi}} - \frac{g}{l} \cancel{\cos \varphi^*} + \frac{g}{l} \sin \varphi^* \delta\varphi = -\frac{\cancel{f^* \sin \varphi^*}}{ml} - \frac{\sin \varphi^* \delta f}{ml} - \frac{f^* \cos \varphi^* \delta\varphi}{ml}$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi^* \delta\varphi = -\frac{\sin \varphi^*}{ml} \delta f - \frac{f^* \cos \varphi^*}{ml} \delta\varphi$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \left[\frac{g}{l} \sin \varphi^* + \frac{f^* \cos \varphi^*}{ml} \right] \delta\varphi = -\frac{\sin \varphi^*}{ml} \delta f$$

משוואה ב $\delta\varphi$ לינארית.

ניקח לדוגמא כניסה נומינלית $f^* = 0$. פתרון נומינלי $\varphi^* = \frac{\pi}{2}$.

משוואה לא לינארית מקורית:

$$\text{הצמד } (f^*(t), \varphi^*(t)) \text{ מהווה מסלול נומינלי של המערכת } \left\{ f^* = 0, \varphi = \frac{\pi}{2} \right\}$$

הפרות:

$$\delta\ddot{\varphi} + \left[\frac{g}{l} + \cancel{f^*} \right] \delta\varphi = \frac{-1}{ml} \delta f$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \delta\varphi = \frac{-1}{ml} \delta f$$

במרחב המצב:

$$x_1 \triangleq \delta\varphi$$

$$x_2 \triangleq \delta\dot{\varphi} = \dot{x}_1$$

$$u \triangleq \delta f$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \sin \varphi^* - \frac{f^* \cos \varphi^*}{ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sin \varphi^*}{ml} \end{bmatrix} u(t)$$

המקרה הפרטי:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad \text{נתונה משוואה לא לינארית כללית:}$$

$$x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x} = f(x^*, u^*, t) \quad \text{נניח פתרון נומינלי וכוניסה נומינלית}$$

$$u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \quad \text{כעת נגדיר את ההפרות:}$$

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$$

$$\text{ההנחה היא: אם } \|\delta u(t)\| \text{ קטנה אזי גם } \|\delta x(t)\| \text{ קטנה.}$$

$$\dot{x} + \delta \dot{x} = f(x^* + \delta x, u^* + \delta u, t) \quad \text{נציב למשוואה המקורית:}$$

$$\dot{x}_i^* + \delta \dot{x}_i = f_i(x^* + \delta x, u^* + \delta u, t) \quad \text{משוואה סקלרית מתוך המשוואה הוקטורית:}$$

$$\text{נבצע קירוב טיילור מסדר ראשון: פיתוח } f_i \text{ סביב } x^*, u^* :$$

$$f_i[x^* + \delta x, u^* + \delta u, t] = f_i[x^*, u^*, t] + [\nabla_x f_i|_{x^*, u^*}]^T \delta x + [\nabla_u f_i|_{x^*, u^*}]^T \delta u + o(\|\delta x^2\|, \|\delta u^2\|, \|\delta x \delta u\|)$$

וקטור עמודה:

$$\nabla_x f_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$[\nabla_x f_i|_{x^*, u^*}]^T \triangleq (\nabla_x f_i^*)^T \quad \text{נסמן בקיצור}$$

נרשום את המשוואות הסקלריות: (n משוואות)

$$\dot{x}_1^* + \delta \dot{x}_1 = f_1[x^*, u^*, t] + (\nabla_x f_1^*)^T \delta x + (\nabla_u f_1^*)^T \delta u$$

$$\dot{x}_2^* + \delta \dot{x}_2 = f_2[x^*, u^*, t] + (\nabla_x f_2^*)^T \delta x + (\nabla_u f_2^*)^T \delta u$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^*}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1^*}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1^*}{\partial x_3} & \dots \\ \frac{\partial f_2^*}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2^*}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2^*}{\partial x_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n^*}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n^*}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n^*}{\partial x_3} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^*}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1^*}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1^*}{\partial u_3} & \dots \\ \frac{\partial f_2^*}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2^*}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2^*}{\partial u_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n^*}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n^*}{\partial u_2} & \frac{\partial f_n^*}{\partial u_3} & \dots \end{bmatrix}}_{n \times p} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \vdots \\ \delta u_p \end{bmatrix}}_{p \times 1}$$

נסמן את היעקוביאנים באופן הבא :

$$\begin{aligned} & \left[\nabla_x f^T \right]^T \Big|_{x^*, u^*} \\ & \left[\nabla_u f^T \right]^T \Big|_{x^*, u^*} \\ & \nabla_x f^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

נוכל לכתוב באופן הבא :

$$\delta \dot{x} = \underbrace{\left[\nabla_x f^T \right]^T (x^*, u^*)}_A \delta x(t) + \underbrace{\left[\nabla_u f^T \right]^T (x^*, u^*)}_B \delta u(t)$$

משוואת המצב הלינארית הינה : $\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u$

6.2 תרגיל

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{l} \cos x_1 - \frac{f}{ml} \sin x_1 \\ x_1 = f_1(x_1, x_2, f) \\ x_2 = f_2(x_1, x_2, f) \end{cases}$$

בכתיב מטריצי :

$$\delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{f}{ml} \cos x_1 & 0 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \sin x_1^* \end{bmatrix} \delta f$$

$$\dot{x} = Ax$$

הפתרון לחלק ההומוגני של משוואת המצב הינו : $x(t_0) = x_0$

מטריצת המעבר : $x(t) = \phi(t, t_0) \cdot x$. נציב למשוואה המקורית :

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) = A(t) \cdot x \\ & x_0 \\ & \underbrace{\phi(t, t_0) \cdot x_0}_{\dot{x}} = A(t) \phi(t, t_0) \cdot x_0 \end{aligned}$$

x_0 שרירותי ולכן נובע כי $\dot{\phi}(t, t_0) = A(t) \phi(t, t_0)$

עבור (t_0, t_0) נקבל:

$$\begin{aligned}x(t_0) &= \phi(t_0, t_0) \cdot x_0 \\ \dot{\phi}(t, t_0) &= A(t) \cdot \phi(t, t_0) \\ \phi(t_0, t_0) &= I\end{aligned}$$

תכונות מטריצת מעבר:

1. מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית ההומוגנית.
2. $\phi(t_0, t_0) = I$ תנאי ההתחלה הוא
3. $\phi(t_2, t_1) \cdot \phi(t_1, t_0) = \phi(t_2, t_0)$
4. $\phi(t_0, t_1) = \phi^{-1}(t_1, t_0)$

נוכיח את 3:

$$\begin{aligned}x(t_2) &= \phi(t_2, t_1) \cdot x(t_1) \\ x(t_1) &= \phi(t_1, t_0) \cdot x(t_0) \\ x(t_2) &= \phi(t_2, t_1) \cdot \phi(t_1, t_0) \cdot x(t_0) \Rightarrow x(t_2) = \phi(t_2, t_0) \cdot x(t_0) \square\end{aligned}$$

נוכיח את 4:

$$I = \phi(t_0, t_0) = \phi(t_0, t_1) \cdot \phi(t_1, t_0) \Rightarrow \phi(t_0, t_1) = \phi^{-1}(t_1, t_0) \square$$

למטריצת המעבר יש הופכית.

חישוב ϕ :

$$\left. \begin{aligned}\dot{\phi}(t, t_0) &= A(t) \cdot \phi(t, t_0) \\ \phi(t_0, t_0) &= I\end{aligned} \right\}$$

פתרון לפי טורים

הנחה A – מטריצת הדינמיקה הינה קבועה.

$$x(t_0 + \tau) = \underline{x}(t_0) + \dot{\underline{x}}(t_0)\tau + \ddot{\underline{x}}(t_0)\frac{\tau^2}{2!} + \dots$$

$$\dot{\underline{x}}(t_0) = A(t_0)\underline{x}(t_0)$$

$$\ddot{\underline{x}}(t_0) = \frac{d}{dt}(A\underline{x}) \Big|_{t=t_0} = A\dot{\underline{x}} \Big|_{t=t_0} = A^2 \underline{x}(t_0)$$

$$x(t_0 + \tau) = \underline{x}(t_0) + A\underline{x}(t_0)\tau + A^2 \underline{x}(t_0)\frac{\tau^2}{2!} + \dots$$

$$x(t_0 + \tau) = \left[I + A\tau + A^2 \frac{\tau^2}{2!} + \dots \right] \underline{x}(t_0)$$

$$\phi(t_0 + \tau, t_0) = I + A\tau + A^2 \frac{\tau^2}{2!} + \dots \triangleq e^{A\tau} \rightarrow x(t_0 + \tau) = e^{A\tau} \underline{x}(t_0)$$

$$t_0 + \tau = t_1$$

$$x(t_1) = e^{A\tau} \underline{x}(t_0)$$

בקירוב גס נכתוב: $e^{Ar} \cong I + Ar$

דרך נוספת, לפי התמרת לפלס:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|\dot{\underline{x}} &= A\underline{x} \\ s\underline{x}(s) - \underline{x}(0) &= A\underline{x}(s) \\ (sI - A)\underline{x}(s) &= \underline{x}(0) \\ \underline{x}(s) &= (sI - A)^{-1} \underline{x}(0) \Big| \mathcal{L}^{-1} \\ \underline{x}(t) &= \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}}_{\triangleq \phi(t, t_0)} \underline{x}(0) \\ \phi(t, t_0) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}\end{aligned}$$

תרגיל 6.3

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ sI - A &= \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix} \\ (sI - A)^{-1} &= \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}^T}{(s-1)^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix} \\ \phi &= \mathcal{L}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \\ te^t & e^t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

שיטה:

תנאי: A קבועה ולכסינה. $A = V \Lambda V^{-1}$.

כאשר Λ - מטריצת הערכים העצמיים (אלכסונית)

V - מטריצת הוקטורים העצמיים (עמודות המטריצה).

משפט: אם A לכסינה אז $e^{A\tau} = V e^{\Lambda\tau} V^{-1}$. היכן ש: $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ערכים עצמיים ו-
 $V = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_n]$ וקטורים עצמיים.

$$e^{A\tau} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1\tau} & 0 & & \\ 0 & e^{\lambda_2\tau} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n\tau} \end{bmatrix}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} e^{A\tau} &= I + A\tau + A^2 \frac{\tau^2}{2!} + \dots = I + V \Lambda V^{-1} \tau + \frac{1}{2} V \Lambda V^{-1} V \Lambda V^{-1} \tau^2 + \dots = \\ &= V^{-1} V + V \Lambda V^{-1} \tau + \frac{1}{2} V \Lambda^2 V^{-1} \tau^2 + \dots = V \left[I + \Lambda \tau + \frac{1}{2} \Lambda^2 \tau^2 + \dots \right] V^{-1} = V e^{\Lambda\tau} V^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{A\tau} &= I + A\tau + A^2 \frac{\tau^2}{2!} + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1\tau & & & \\ & \lambda_2\tau & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\tau \end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^2\tau^2 & & & \\ & \lambda_2^2\tau^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\tau^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1\tau + \frac{1}{2}\lambda_1^2\tau^2 & & & \\ & \vdots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + \lambda_n\tau + \frac{1}{2}\lambda_n^2\tau^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1\tau} & & & \\ & \vdots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n\tau} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

תכונות נוספות של מטריצת המעבר

משפט: אם A קבועה אז $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$. באופן מפורש: $I - At + A^2 \frac{t^2}{2!} - \dots$

משפט: אם A קבועה אז e^{At} ו e^{-At} קומוטטיביות, כלומר: $e^{At} A = A e^{At}$ ו- e^{-At} קומוטטיביות עם A .

$$\frac{d}{dt} \phi^{-1}(t, t_0) = -\phi^{-1}(t, t_0) A$$

משפט: נגזור את המשוואה הבאה בזמן:

$$\phi(t, t_0) \cdot \phi^{-1}(t, t_0) = I$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \phi(t, t_0)}_{A\phi(t, t_0)} \cdot \phi^{-1}(t, t_0) + \phi(t, t_0) \cdot \frac{d}{dt} \phi^{-1}(t, t_0) = 0$$

$$A\phi(t, t_0) \phi^{-1}(t, t_0) = -\phi(t, t_0) \cdot \frac{d}{dt} \phi^{-1}(t, t_0)$$

$$A\phi^{-1}(t, t_0) = -\frac{d}{dt} \phi^{-1}(t, t_0)$$

$$A = -\phi(t, t_0) \cdot \frac{d}{dt} \phi^{-1}(t, t_0)$$

$$-\phi^{-1}(t, t_0) A = \frac{d}{dt} \phi^{-1}(t, t_0)$$

$$\phi^{-1}(t, t_0) = \left[e^{A(t-t_0)} \right]^{-1} = e^{-A(t-t_0)}$$

המשפט מקבל את הצורה:

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -e^{-At} A$$

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = A e^{-At}$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$\dot{x} = Ax + B(t)u \triangleq f(t)$$

פתרון המשוואה הלא-הומוגנית:

נגדיר: $\underline{z}(t) \triangleq \phi^{-1}(t, t_0) \underline{x}(t)$. נמצא את משוואת המצב של $\underline{z}(t)$.

$$\underline{z}(t) \triangleq \frac{d}{dt} \phi^{-1}(t, t_0) \underline{x}(t) + \phi^{-1}(t, t_0) \frac{d}{dt} \underline{x}(t) = -\phi^{-1}(t, t_0) A \underline{x}(t) + \phi^{-1}(t, t_0) [A \underline{x}(t) + \underline{f}]$$

$$\dot{\underline{z}}(t) = \phi^{-1}(t, t_0) \cdot \underline{f}$$

$$\underline{z}(t) = \underline{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(\tau, t_0) \cdot \underline{f}(\tau) d\tau$$

$$\underline{z}(t) \triangleq \phi^{-1}(t, t_0) \underline{x}(t) = \underline{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(\tau, t_0) \cdot \underline{f}(\tau) d\tau$$

$$\underline{z}(t_0) = \underbrace{\phi^{-1}(t_0, t_0)}_I \underline{x}(t_0) \rightarrow \underline{z}(t_0) = \underline{x}(t_0)$$

$$\underline{z}(t) = \phi^{-1}(t, t_0) \underline{x}(t) = \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(\tau, t_0) \cdot \underline{f}(\tau) d\tau$$

$$\underline{x}(t) = \phi(t, t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, t_0) \phi(\tau, t_0) \cdot \underline{f}(\tau) d\tau = \phi(t, t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \cdot \underline{f}(\tau) d\tau$$

$$\underline{x}(t) = \phi(t, t_0) \underline{x}(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{אינטגרל להקטנת צי"ח}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{array} \right\} LTIV$$

נניח תנאי התחלה אפס :

$$\left. \begin{array}{l} s\underline{X}(s) = A\underline{X}(s) + B\underline{U}(s) \\ \underline{Y}(s) = C\underline{X}(s) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{X}(s) = (sI - A)^{-1} B\underline{U}(s) \\ \underline{Y}(s) = C(sI - A)^{-1} B\underline{U}(s) \end{array} \right\}$$

$$\underline{Y}(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B\underline{U}(s)$$

נרצה לדעת מהם הקטבים של המערכת :

כל הקטבים של מטריצת התמסורת הם ערכים עצמיים של A.

אבל לא כל ערך עצמי הוא קוטב של המערכת, כיוון שיתכן והוא צומצם ע"י C, B. כלומר יכולים להיות ערכים עצמיים שאינם קטבים של המערכת.

יציבות התגובה לכניסה מסויימת נקבעת ע"פ מיקום הקטבים.

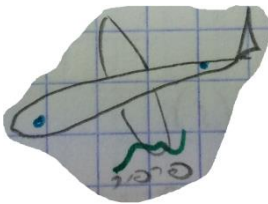
נניח שאין ערעור חיצוני ותנאי ההתחלה הוא $\underline{x}_0$:

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}_0 = A\underline{X}(s)$$

$$(sI - A)\underline{X}(s) = \underline{x}_0$$

$$\underline{X}(s) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \underline{x}_0$$

וקטור המצב נותן תמונה מלאה של המערכ. זה לא נכון לגבי Y.



המטוס כמערכת שלמה לא יציב! אך אם נמדוד בנקודות הכחולות-הכל בסדר. מיקום הסנסור הינו שרירותי. צריך לשים את הסנסורים בצורה נכונה כדי שנוכל לראות את פונקציית התמסורת הנכונה. יציבות וקטור המצב נקבעת ע"פ מיקום הערכים העצמיים. יציבות וקטור המצב ← יציבות יחס תגובה כניסה (ולא בהכרח להיפך).

טרנספורמציה לינארית

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{array} \right\} LTIV$$

טרנספורמציה :

$$\underline{z} \triangleq T\underline{x}$$

$$\dot{\underline{z}} \triangleq T\dot{\underline{x}} = TA\underline{x} + TB\underline{u}$$

נניח T רגולרית (לא סינגולרית) ונגיע להצגה קנונית של המערכת:

$$\begin{aligned} \underline{x} &\triangleq T^{-1} \underline{z} \\ \left. \begin{aligned} \dot{\underline{z}} &= TAT^{-1} \underline{z} + TB\underline{u} \\ f &= CT^{-1} \underline{z} \end{aligned} \right\} \\ A' &= TAT^{-1}, B' = TB, C' = CT^{-1} \\ \left. \begin{aligned} \dot{\underline{z}} &= A' \underline{z} + B' \underline{u} \\ f &= C' \underline{z} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

טענה: הערכים העצמיים של מערכת הם אינווריאנטים תחת טרנספורמציה רגולרית.

הוכחה: צ"ל עי"ע של A הם גם העי"ע של TAT^{-1} :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - TAT^{-1}) &= 0 \\ \det(\lambda TT^{-1} - TAT^{-1}) &= 0 \\ \det(T(\lambda I - A)T^{-1}) &= 0 \\ \det(T) \det(\lambda I - A) \det(T^{-1}) &= 0 \rightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \square \end{aligned}$$

היציבות היא תכונה של המערכת.

טרנספורמציה קנונית

נניח שהריבוי האלגברי של $A =$ הריבוי הגיאומטרי $\leftarrow A$ לכסינה.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} \\ \dim(\underline{u}) &= p \end{aligned}$$

נבצע פירוק ספקטרלי (עי"ע ו-וי"ע) של A : $A = V\Lambda V^{-1}$

Λ : מטריצה אלכסונית של עי"ע $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

V : מטריצת הוי"ע של A . $V = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3 | \dots | \underline{v}_n]$

נבצע טרנספורמציה לינארית ונגיע להצגה קנונית:

$$\begin{aligned} \underline{X} &\triangleq V \cdot \underline{Z} \\ A' &= V^{-1}AV = \Lambda \\ B' &= V^{-1}B \\ C' &= CV \\ \boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{Z}} &= \Lambda \underline{Z} + V^{-1}B\underline{u} \\ \underline{y} &= CV\underline{Z} \end{aligned}} \end{aligned}$$

$$\dot{\underline{z}} = \lambda \underline{z} + \sum_{j=1}^p (V^{-1}B)_{i,j} \cdot u_j$$

הדינמיקה של $\underline{z}$ היא בלתי מצומדת.

קיבלנו מעין אוסף של תת-מערכות. הפירוק הזה מאפשר חשיפה של המערכת. למשל לפי ה- λ ניתן לקבוע אם היא יציבה. בפירוק הזה כל משוואה הינה מונד של המערכת.

וקטורים עצמיים ותדירויות טבעיות

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{x}(t_0) &= \underline{x}_0 \end{aligned} \right\}$$

נניח $A = V\Lambda V^{-1}$ נטפל בתגובה לתנאי ההתחלה $\underline{u} = 0$.

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{A(t-t_0)} \underline{x}_0 \\ e^{A(t-t_0)} &= V e^{\Lambda(t-t_0)} V^{-1} \\ \underline{x}(t) &= V e^{\Lambda(t-t_0)} V^{-1} \underline{x}_0 \end{aligned}$$

$$V = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3 | \dots | \underline{v}_n] \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_n^T \end{bmatrix}$$

$\underline{r}_i^T$: שורה i של V^{-1} .

$$\underline{x}(t) = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3 | \dots | \underline{v}_n] \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & \\ & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_n^T \end{bmatrix} \underline{x}_0$$

$$V^{-1} \underline{x}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{r}_1^T, \underline{x}_0 \\ \underline{r}_2^T, \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \underline{r}_n^T, \underline{x}_0 \end{bmatrix}}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \langle \underline{r}_1, \underline{x}_0 \rangle \\ \langle \underline{r}_2, \underline{x}_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle \underline{r}_n, \underline{x}_0 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} \langle \underline{r}_i, \underline{x}_0 \rangle \underline{v}_i$$

$\underline{v}_i$ - הצורות המודאליות = מודים.

טענה: אם $\underline{x}_0$ בכיוון אחד המודים $\underline{v}_j$ (קולינארי עם $\underline{v}_j$) אזי שאר המודים אינם משתתפים בפתרון ההומוגני.

הוכחה:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_n^T \end{bmatrix}}_{V^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix}}_V = I$$

$$I_{ij} - \underline{r}_i^T \underline{v}_j = \langle \underline{r}_i, \underline{v}_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$

$\underline{r}_i \perp \underline{v}_j$ עבור כל $i \neq j$

נניח $\underline{x}_0 = \alpha \underline{v}_j$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} \langle \underline{r}_i, \alpha \underline{v}_j \rangle \underline{v}_i = \alpha e^{\lambda_j(t-t_0)} \underline{v}_j$$

$$A \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$$

$$AV = V \Lambda \cdot V^{-1}$$

$$A \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} A V V^{-1} = V^{-1} V \Lambda V^{-1}$$

$$V^{-1} A = \Lambda V^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_n^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \vdots \\ \underline{r}_n^T \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_i^T A = \lambda_i \underline{r}_i^T$$

$\{\underline{r}_i\}$ וקטורים עצמיים שמאליים של A .

$$A \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \mid (T)$$

$$\underline{v}_i^T A^T = \lambda_i \underline{v}_i^T$$

$\{\underline{v}_i\}$ הם הוקטורים העצמיים השמאליים של A^T .

קונטרולביליות (בקירות)

נתבונן בדיאגרמת הזרימה משמאל:

ישנו צימוד (באדום).

קשה להגיד אם קל/ קשה לבקר את המערכת.

שאלה: האם ניתן בזמן סופי להביא את x_1 ואת x_2

ממצבם ההתחלתי למצב רצוני אחר ע"י הכתבת $u(t)$

מתאים?

הצימוד מפריע.

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

הערכים העצמיים הינם 1,2.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 \\ \dot{z}_2 &= 2z_2 + u \end{aligned} \right\}$$

מתוך $\dot{z}_1 = z_1$ מתקבל פתרון מתבדר, לכן: אין גישה למוד הראשון ($\lambda_1 = 1$) עם הבקר u . לא בשליטתנו וגם מתבדר מכאן שהמערכת אינה בקירה.

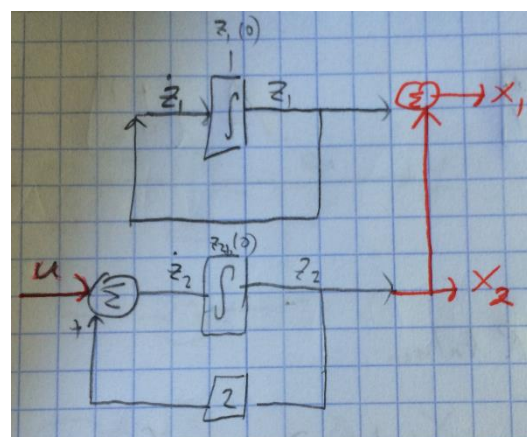
טרנספורמציה קונונית אלכסונית:

$$\underline{x} = V \underline{z}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_V \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = z_1 + z_2$$

$$x_2 = z_2$$



אם יש שורה של אפסים אזי המערכת אינה בקירה.

המערכת $\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$ בקירה (קונטרולבילית) אם עבור כל וקטור תנאי התחלה $\underline{x}_0$ בזמן סופי t_f ו-
וקטור תנאי סוף $\underline{x}_f$ ניתן למצוא כניסה $u(t)$ $t_0 \leq t \leq t_f$ אשר תעביר את המצב מ $x(t_0) = x_0$ ל $x(t_f) = x_f$.

הגדרה: המערכת הינה Output Control אם האמור לעיל לגבי וקטור היציאה (המדידה) $y(t)$:

תנאי לקונטרולביליות מספיק, והכרחי: אין שורת אפסים במטריצת B' במימוש הקונוני האלכסוני.

משפט: המערכת עם מקדמים A, B קבועים היא Completely State Control אם"ם המטריצה Q היא מדרגה מלאה היכן ש: $Q \triangleq [B | AB | \dots | A^{n-1}B]$ והמערכת היא Output Control אם"ם מטריצה $\tilde{Q}$ היא מדרגה מלאה $\tilde{Q} \triangleq [CB | CAB | \dots | CA^{n-1}B]$.

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

$$\underline{u} \in \mathbb{R}^p$$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

$$AB \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

$$Q_n = \underbrace{\{n \times p | n \times p | \dots\}}_{np}$$

$$Q \in \mathbb{R}^{n \times np} \rightarrow \text{rank} Q = n$$

7.1 תרגיל

דוגמא למערכת לא קונטרולבילית:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

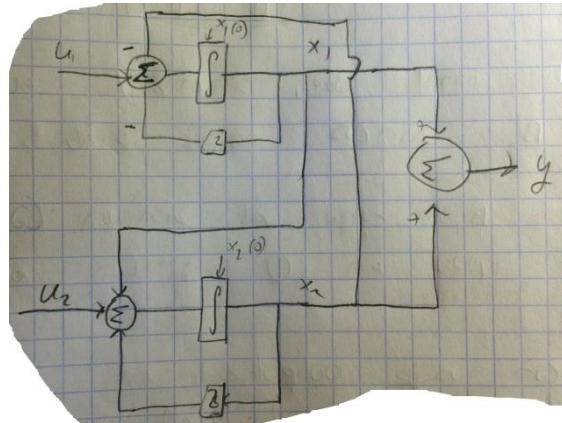
$$\text{rank} Q = 1$$

הגדרה: נתונה המערכת $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, $x \in \mathbb{R}^m$. המערכת נקראת אובזרוובילית אם ידיעת הכניסה $u(\tau)$ והיציאה $y(\tau)$ בקטע סופי $t_0 \leq \tau \leq t_f$, היכן ש t_f שרירותי מגדיר את $x(t_0)$ לחלוטין (או את $x(t_f)$).

תרגיל 7.2

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

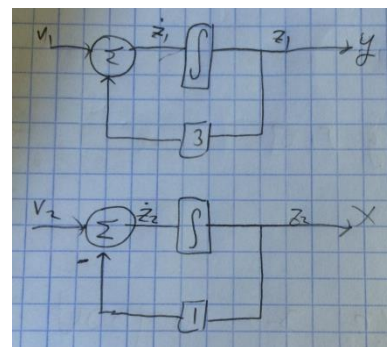
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



נלכסן את המערכת:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$



קיבלנו עמודה של אפסים (במקרה זה אפס יחיד) מכאן ש z_2 לא נמדד

פונקציית התמסורת:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \frac{-1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = I$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

זהו תיאור מצומצם של המערכת. נשים לב ש הקוטב "-1" התבטל לנו.

תנאי הכרחי ומספיק לאובזוביליות : אין עמודת אפסים ב- C .

משפט: מערכת היא צפייה אם"ם המטריצה P היא מדרגה מלאה.

$$P \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$$P \in \mathbb{R}^{m \cdot n, n}$$

המערכת אובזובילית אם $\text{rank}P = n$ - דרגה מלאה.

בתרגיל:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}, \text{ לא דרגה מלאה ולכן לא אובזובילית.}$$

$$\text{נניח } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ נקבל: } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ דרגה מלאה ואכן אובזובילית.}$$