

תורת המשחקים והתנהגות כלכלית

096570

סיכום הרצאות סמסטר קיץ תשע"ה
(אוג'-ספט' 2015)

הפקולטה להנדסת תעשייה וניהול
הטכניון-מכון טכנולוגי לישראל

מרצה: ד"ר חובב פרץ
נכתב ע"י ברק אור

החוברת מכילה סיכומי הרצאות, פתרונות תרגילי כיתה, פתרונות שאלות מבחנים
שנפתרו במהלך ההרצאות ומבחן לדוגמא עם פתרון מלא.



3	מבנה משחק, רציונליות, אסטרטגיה נשלטת חזק והגדרות נוספות
4	ש"מ נאש
8	רמות ביטחון, משחקי סכום אפס, מודל קורנו, מודל ברטרנד
10	מכרז
13	אסטרטגיות מעורבות
16	רמות ביטחון אסטרטגיות מעורבות
21	משפט המינימקס
22	משחקים דינמיים בצורת עץ
23	מודלים כלכליים המתוארים בצורת עץ
25	מודל המיקוח של רובינשטיין
29	משחקים חוזרים ומשחקים דינמיים לא פשוטים
37	מבחן+פתרון מלא 8.5.13

תורת המשחקים והתנהגות כלכלית

ניתן לחלק לשני תחומים. תחום ראשון הוא משחקים שיתופיים, בהם בוחנים התהוות של מבנים קואליציוניים של שיתופי פעולה ויציבותם. התחום השני (ובו עוסק הקורס) הוא משחקים לא שיתופיים, כאן בוחנים את האינטראקציות בין מקבלי ההחלטות לפרטים כשכל מקבל החלטות דואג לאינטרסים שלו. בכלכלה בד"כ בודקים תחרות בין חברות מסוימות. כל חברה דואגת לעצמה- האינטרסים הינם פרטיים.

מבנה משחק-

1. קבוצת השחקנים- מקבלי ההחלטות
2. לכל שחקן- קבוצת האסטרטגיות (החלטות/ סדרת החלטות שיוכל לקבל)
3. פונקציית תשלום (Payoff)- פונקציות שמראות (ע"י ערך מספרי) מה יקבל כל שחקן כאשר אסטרטגיות השחקנים נפגשות

נתאר את המשחק בתוך מטריצת תשלומים, לדוגמא:

	C	D	E
A	7,10	9,12	15,9
B	12,7	10,6	7,5

במצב זה A,B הן האסטרטגיות של שחקן 1 והאסטרטגיות C,D,E הן של שחקן 2.

אם נסתכל על כל משבצת בנפרד לא ניתן לקבוע מי ניצח, שכן לכל שחקן יש "סולם מדידה" משל עצמו. בנוסף אנו מניחים שכל אחד מהשחקנים רואה את הטבלה בנפרד, לכן טיבה של החלטה תלוי במה שהשחקן השני יעשה גם. בדוגמא רואים שלשחקן 2 אין שום סיבה לבחור באסטרטגיה E, שכן הוא מקבל תשלום נמוך יותר מאשר אם בוחר באסטרטגיות C,D.

ידיעה משותפת - Commune Knowledge- מאורע יהיה בידיעה משותפת אם כולם יודעים שהוא קרה וכולם יודעים שכולם יודעים אותו וכך הלאה.

רציונליות של שחקן- השחקן יבחר את האפשרות הטובה ביותר עבורו ע"ס המידע העומד לרשותו. הנחות: רציונליות השחקנים היא ידיעה משותפת, כולם רואים שיש משחק וכולם יודעים מה המשחק.

אסטרטגיה נשלטת חזק- נגיד שהאסטרטגיה E נשלטת חזק ע"י C עבור שחקן 2, כיוון שעבור כל אסטרטגיה של שחקן 1, E תיתן תשלום נמוך מאשר C. יחד עם הידיעה המשותפת של הרציונליות נוכל להרחיק את E מהמשחק. במצב כזה המשחק האפקטיבי מצטמצם:

	C	D	E
A	7,10	9,12	15,9
B	12,7	10,6	7,5

נסתכל כעת על המשחק המצומצם: A נשלטת חזק ע"י B עבור שחקן 1 ולכן נוכל לצמצם

	C	D	E
A	7,10	9,12	15,9
B	12,7	10,6	7,5

נשארו במצב שבו לשחקן 1 יש אסטרטגיה אחת: B ואילו לשחקן 2 יש 2 אסטרטגיות: C,D. אסטרטגיה D נשלטת ע"י אסטרטגיה C אזל שחקן 2

	C	D	E
A	7,10	9,12	15,9
B	12,7	10,6	7,5

מצב כזה נקרא "משחק פתור". באופן כללי, משחק יקרא פתיר אם קיימת סדרה של הרחקות של אסטרטגיות נשלטות שבעקבותיה נתכנס לפרופיל אסטרטגיות יחיד. בדוגמא המשחק פתיר. הבעיה היא שרוב המשחקים אינם פתירים.

קבוצת השחקנים - $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

קבוצת האסטרטגיות לשחקן i - X_i

אסטרטגיה של שחקן i - $x_i \in X_i$

פרופיל אסטרטגיות- וקטורי האסטרטגיות של השחקנים $X = (X_1, X_2, X_3, \dots) \in X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots$

מסומן בקיצור $X = \times X_i$, כאשר $i \in N$.

בדוגמא $X_1 = \{A, B\}$ ואז מרחב המכפלה הקרטזית: $X_1 \times X_2 = \{A, B, C, D, E\}$

פונקציית התשלום של שחקן i - $u_i: X \rightarrow R$, למשל $u_2(A, C) = 10$.

פרופיל חלקי של היריבים - מסומן ב X_{-i} עבור שחקן i . כלומר מציגים את מרחב המכפלה הקרטזית של

כולם מלבד השחקן i . באופן הבא: $x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}) \in X_{-i}$

אסטרטגיה x_i נשלטת חזק ע"י האסטרטגיה x'_i אם: לכל $x_{-i} \in X_{-i}$ מתקיים: $u(x_i, x_{-i}) < u(x'_i, x_{-i})$.

בדוגמא נראה למשל עבור שחקן 2: $X_2 = \{A, B\}$, $u_2(E, B) < u_2(C, B)$, $u_2(E, A) < u_2(C, A)$ כלומר E נשלטת חזק ע"י C .

אסטרטגיה נשלטת חלש - x_i נשלטת חלש אצל שחקן i ע"י האסטרטגיה x'_i אם: לכל $x_{-i} \in X_{-i}$ מתקיים:

$$u(x_i, x_{-i}) \leq u(x'_i, x_{-i})$$

אסטרטגיה שולטת חזק (חלש) - x_i שולטת חזק (חלש) של שחקן i אם כל אסטרטגיה אחרת של שחקן i

נשלטת חזק (חלש) ע"י x_i .

שינוי משקל נאש - פרופיל אסטרטגיות X נמצא בשינוי משקל נאש אם לכל שחקן האסטרטגיה המשווקת על ידו ב- X הינה תגובתו האופטימלית ליריביו.

הגדרה: אסטרטגיה x_i מהווה תגובה אופטימלית של שחקן i לפרופיל חלקי של יריביו אם לכל $x'_i \in X_i$

מתקיים: $u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(x'_i, x_{-i})$. BR=Best Respond - נסמן ב $BR_i(x_{-i})$ את התגובות

האופטימליות של שחקן i כנגד x_{-i} . **בדוגמא** $BR_1(A) = \{D\}$, $BR_2(A) = \{D\}$, $BR_1(E) = \{A\}$.

במונחי ש"מ נאש: פרופיל $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ בש"מ נאש אם לכל $i \in N$ מתקיים $x_i \in BR_i(x_{-i})$.

בדוגמא רואים ש (A, D) לא ש"מ נאש: $D \in BR_2(A)$ אבל $A \notin BR_1(D)$. לעומת זאת (B, C) כן.

	C	D
A	15,7	1,6
B	14,1	2,3

נראה משחק בו יש 2 ש"מ נאש:

(B, D) (A, C)

	C	D
A	15,3	1,3
B	15,2	1,2

נראה משחק בו יש 4 ש"מ נאש:

	C	D
A	13,4	18,3
B	28,50	17,51

נראה משחק בו אין ש"מ נאש:

דילמת האסיר כדוגמא רעה למונח פתרון -

2 חשודים בפשע נעצרו. כל חשוד נחקר בחדר נפרד וכל חשוד יכול להודות ולהלשין על שותפו או לא.

המצבים האפשריים הם: שניהם לא הלשינו, אחד הלשין והשני לא, שניהם הלשינו.

מדרג המצבים (מנקודת מבטו של כל חשוד בנפרד): הלשנתי ולא הלשינו עליי, שנינו לא הלשינו, שנינו

הלשנו, לא הלשנתי והיריב הלשין עליי. נניח שמטריצת התשלומים היא:

אם הם לא "נופלים" אזי יש לנו תוצאה יציבה מקומית, אבל ייתכן וכן

"יפלו". כאן ניתן לחשוב בצורה רציונלית ועדיין להגיע לתוצאה שניתנת

לשיפור בידי כולם. כלומר: סדרה של בחירות שנעשתה באופן רציונלי

הובילה לתוצאה שניתנת לשיפור ע"י על השחקנים. כאן נולד המושג של

משחקים חוזרים (בהמשך).

	לא הלשין	הלשין
לא הלשין	7,1	2,3
הלשין	6,8	1,10

דוגמא למשחק עם 3 שחקנים:

אם שחקן 3 בוחר ב-A

	E	F
C	5,8,2	6,4,7
D	7,9,5	8,7,6

אם שחקן 3 בוחר ב-B

	E	F
C	7,5,3	7,5,8
D	6,7,6	7,1,5

ננתח את המשחק:

אצל שחקן 1 (האסטרטגיות מופיעות בשורות) C לא נשלטת ע"י D ***

אצל שחקן 2 F נשלטת חלש ע"י E ולכן F מורחקת *** (פירוט משמאל)

$$(A, C) \quad 4 < 8 \quad (A, D) \quad 7 < 9$$

$$(B, C) \quad 5 \leq 5 \quad (B, D) \quad 1 < 7$$

אם שחקן 3 בוחר ב-A

	E	F
C	5,8,2	6,4,7
D	7,9,5	8,7,6

	E
C	5,8,2
D	7,9,5

אם שחקן 3 בוחר ב-B

	E	F
C	7,5,3	7,5,8
D	6,7,6	7,1,5

	E
C	7,5,3

במשחק המצומצם B לא נשלטת חלש ע"י A, כי כנגד (C,E) $2 < 3$ עבור שחקן 3, כלומר A נשלטת ע"י B
אצל שחקן 3 ולכן ניתן להרחיקה. במשחק המצומצם אנחנו נשארים למעשה עם הפרופיל (C,E,B).
נבדוק האם הפרופיל הנ"ל הינו ש"מ נאש?

$$C \in BR_1((E,B)) = \{C\}$$

$$E \in BR_2((C,B)) = \{E,F\}$$

$$B \in BR_3((C,E)) = \{B\}$$

ואכן מתקבל ש (C,E,B) הינו ש"מ נאש.

דוגמא- נתון רחוב שלאורכו מפולגים הדיירים בצורה אחידה. 2 בתי עסק צריכים להתמקם לאורך הרחוב.
כל דייר ברחוב יפנה לבית העסק הקרוב אליו ביותר. איך יתמקמו בתי העסק בש"מ?



פתרון: קיימת אפשרות אחת לש"מ והיא כששני בתי העסק ממוקמים באמצע הרחוב (כל אחד מקבל 1/2).
במידה והיו 3 בתי עסק לא היה ש"מ נאש, כיוון שאם אחד יסטה מעט לאחד הצדדים אזי יקבל יותר מ-1/3.
אם הרחוב הינו עגול (הבתים מפולגים אחיד על המעגל):



במצב כזה כל זוג מיקומים של בתי עסק יוביל למחצית שוק לכל עסק, לכל כל זוג כזה יהיה ש"מ נאש
(אינסוף ש"מ נאש בבעיה).

אם הרחוב הינו חד-סיטרי (נניח תנועה בכיוון השעון) אזי אין ש"מ כלל!

שאלה 3.1 מתוך מבחן 1.8.2014

שני שחקנים משחקים במשחק הבא: כל שחקן בוחר שניים מהמספרים 1,2,3 (ניתן לחזור על אותו מספר, ויש חשיבות לסדר הבחירה). נסמן ב- $(N_{1,1}, N_{1,2})$ את זוג המספרים שבחר שחקן 1 וב- $(N_{2,1}, N_{2,2})$ את זוג המספרים

שבחר שחקן 2.

אם $N_{1,1} > N_{1,2}$, שחקן 1 יזכה ב-50 ש"ח ושחקן 2 יזכה ב-30 ש"ח.

אם $N_{1,1} \leq N_{1,2}$, וכן $N_{2,1} > N_{2,2}$ שחקן 1 יזכה ב-30 ש"ח ושחקן 2 יזכה ב-50 ש"ח.

אם $N_{1,1} \leq N_{1,2}$, וכן $N_{2,1} \leq N_{2,2}$ שחקן 1 יזכה ב-60 ש"ח ושחקן 2 יזכה ב-40 ש"ח.

ישנן 9 אסטרטגיות אשר ניתן לצמצם ל-2 אסטרטגיות לכל שחקן. האסטרטגיה כאן היא למעשה בחירה של זוג מספרים. נכתוב במפורש:

$$A = \{(N_{11}, N_{12}) : N_{11} > N_{12}\} \quad |A| = 3$$

$$B = \{(N_{11}, N_{12}) : N_{11} \leq N_{12}\} \quad |B| = 6$$

$$C = \{(N_{21}, N_{22}) : N_{21} > N_{22}\} \quad |C| = 3$$

$$D = \{(N_{21}, N_{22}) : N_{21} \leq N_{22}\} \quad |D| = 6$$

מטריצת התשלומים תראה כך:

	C	D
A	50,30	50,30
B	30,50	60,40

יש שיווי משקל (A,C) , ובסה"כ 9 שיווי משקל נאש, כיוון שלוקחים את גודל מרחב המכפלה הקרטזית

$$|A \times C| = 9$$

3.1. במשחק בו השחקנים בוחרים סימולטנית

- א. יש מעל 35 שווי משקל נאש באסטרטגיות טהורות.
 ב. יש מעל 25 שווי משקל נאש באסטרטגיות טהורות.
 ג. יש פחות מ-25 שווי משקל נאש באסטרטגיות טהורות.
 ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

הסבר : מצאנו שיש 9 ש"מ נאש באסטרטגיות טהורות (לא מעורבות). למשל האסטרטגיה : $((2,1),(3,1))$.

דוגמא-נתון משחק עם 3 שחקנים :

$$u_1(A,A,B)=3 \quad u_3(A,A,B)=2$$

שחקן 3 בוחר ב-A

	A	B	C
A	2,0,6	-3,4,0	5,6,0
B	4,5,-2	3,1,10	6,2,2
C	1,-1,5	-4,2,2	1,4,1

שחקן 3 בוחר ב-B

	A	B	C
A	3,1,2	4,0,-1	-2,1,-1
B	2,3,-3	4,-1,9	4,0,1
C	-1,7,2	0,-2,1	-4,-3,10

בפתרון במשחק אנחנו מניחים שאין שיתופי פעולה, אין תקשורת. כולם מניחים שכולם רציונליים.
 עבור שחקן 1 : A לא נשלטת ע"י B כיוון שקיים פרופיל חלקי (A,B) שבו A לא פחות טובה מ-B (אפילו יותר טובה). כעת נצמצם את המשחק :
 צמצום 1 : C נשלטת ע"י A וגם B אצל שחקן 1 :

שחקן 3 בוחר ב-A

	A	B	C
A	2,0,6	-3,4,0	5,6,0
B	4,5,-2	3,1,10	6,2,2
C	1,-1,5	-4,2,2	1,4,1

שחקן 3 בוחר ב-B

	A	B	C
A	3,1,2	4,0,-1	-2,1,-1
B	2,3,-3	4,-1,9	4,0,1
C	-1,7,2	0,-2,1	-4,-3,10

צמצום 2 : B נשלטת ע"י C אצל שחקן 2 :

שחקן 3 בוחר ב-A

	A	B	C
A	2,0,6	-3,4,0	5,6,0
B	4,5,-2	3,1,10	6,2,2

שחקן 3 בוחר ב-B

	A	B	C
A	3,1,2	4,0,-1	-2,1,-1
B	2,3,-3	4,-1,9	4,0,1

צמצום 3 : B נשלטת ע"י A אצל שחקן 3 : מצמצם לנו את המשחק למצב בו שחקן 3 בוחר ב-A

שחקן 3 בוחר ב-A

	A	C
A	2,0,6	5,6,0
B	4,5,-2	6,2,2

צמצום 4: A נשלטת ע"י B אצל שחקן 1:

	A	C
A	2,0,6	5,6,0
B	4,5,-2	6,2,2

	A	C
B	4,5,-2	6,2,2

צמצום 5: C נשלטת ע"י A אצל שחקן 2

	A	C
B	4,5,-2	6,2,2

	A
B	4,5,-2

קיבלנו את פתרון המשחק: (B,A,A)

כלומר יש לנו ש"מ נאש יחיד במשחק $(u_1, u_2, u_3) = (4, 5, -2)$.

שאלה 4 מתוך קובץ תרגילי בית מס' 1

4 אסטרטגיות לכל חברה. נתונה מטריצת המשחק הבאה. צ"ל פרופיל פתרון.

	1	3	5	7
1	25,24	21,60	17,80	13,84
2	46,22	38,54	30,70	22,70
3	63,20	51,48	39,60	27,56
5	85,16	65,36	45,40	25,28

צמצום 1: "1" נשלטת ע"י "3" אצל שחקן 2

	1	3	5	7
1	25,24	21,60	17,80	13,84
2	46,22	38,54	30,70	22,70
3	63,20	51,48	39,60	27,56
5	85,16	65,36	45,40	25,28

	3	5	7
1	21,60	17,80	13,84
2	38,54	30,70	22,70
3	51,48	39,60	27,56
5	65,36	45,40	25,28

צמצום 2: "3" נשלטת ע"י 5 אצל שחקן 2

	3	5	7
1	21,60	17,80	13,84
2	38,54	30,70	22,70
3	51,48	39,60	27,56
5	65,36	45,40	25,28

	5	7
1	17,80	13,84
2	30,70	22,70
3	39,60	27,56
5	45,40	25,28

צמצום 3: "1" ו-"2" נשלטות ע"י 3 אצל שחקן 1

	5	7
1	17,80	13,84
2	30,70	22,70
3	39,60	27,56
5	45,40	25,28

	5	7
3	39,60	27,56
5	45,40	25,28

צמצום 4: "7" נשלטת ע"י 5 אצל שחקן 2

	5	7
3	39,60	27,56
5	45,40	25,28

	5
3	39,60
5	45,40

נשים לב ששחקן 2 נשאר עם האסטרטגיה "5".

צמצום 5: "3" נשלטת ע"י 5 אצל שחקן 1

	5
3	39,60
5	45,40

	5
5	45,40

פרופיל הפתרון של המשחק הינו (5,5). זהו ש"מ נאש יחיד במשחק.

רמות ביטחון: אסטרטגיות רמות ביטחון ואסטרטגיות הענשה

אסטרטגית "מקסמין" (רמת ביטחון) - לשחקן 1 תשיג את הערך המינימלי מבין כל הערכים המינימליים ששחקן 1 יכול לקבל. האסטרטגיה מסומנת ב x_i .

	C	D
A	1,8	7,5
B	9,2	0,4

$$L_i = \max_{x_i \in X_i} \left(\min_{x_{-i} \in X_{-i}} (u_i(x_i, x_{-i})) \right) : \text{רמת הביטחון} :$$

בדוגמא משמאל:

$$L_1 = \max(\min(1,7), \min(9,0)) = \max(1,0) = 1 \quad L_2 = \max(\min(8,2), \min(5,4)) = \max(2,4) = 4$$

אסטרטגיית הענשה נגד שחקן מסוים תשיג את הערך המינימלי מבין כל הערכים המרביים שהשחקן

המוענש יכול לקבל, הגדרה מתמטית עבור "רמת הענישה": $H_i = \min_{x_{-i} \in X_{-i}} \left(\max_{x_i \in X_i} (u_i(x_i, x_{-i})) \right)$. בדוגמא:

$$H_1 = \min(\max(1,9), \max(7,0)) = \min(9,7) = 7 \quad H_2 = \min(\max(8,5), \max(2,4)) = \min(8,4) = 4$$

טענה- לכל $L_i \leq H_i$.i

הוכחה- נניח בשלילה ש $L_i > H_i$ עבור i מסוים. מכאן שקיימת אסטרטגיה לשחקן i (אסטרטגית

המקסמין) שתסומן ב- x_i^* שעבורה מתקיים $u_i(x_i^*, x_{-i}) \geq L_i$ לכל $x_{-i} \in X_{-i}$. כלומר שלכל x_{-i} קיימת לשחקן

i אסטרטגיה שאיתה יקבל לפחות L_i (זוהי x_i^*) ומכאן $\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{-i}) \geq L_i$ לכל $x_{-i} \in X_{-i}$ וקיבלנו

סתירה. לכן: $L_i \leq H_i$ לכל i .

משחקי סכום אפס

נדון במשחקים עם שני שחקנים שבהם מתקיים $u_1(x_1, x_2) = -u_2(x_1, x_2)$ לכל $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

דוגמא- נתון משחק סכום אפס הבא:
נמצא ש"מ:

	C	D	E
A	7	5	8
B	5	4	9

ראשית נכתוב את הטבלה הבאה ולפיה נצמצם:

	C	D	E
$\min u_1$	7	5	9
$\min u_2$	-7	-5	-9

כלומר אסטרטגיות C ו-E מיד מצטמצמות עבור שחקן 2 וזה משאיר אותנו עם המשחק המצומצם הבא:

	C	D
A	7, -7	5, -5
B	5, -5	4, -4

	D
A	5, -5
B	4, -4

	D
A	5, -5

כלומר ש"מ מתקיים ב- (A, D) והתשלומים הם: $(-5, 5)$.

ניתן למצוא את L ו-H עבור כל שחקן: $L_1 = 5$ ע"י A ו- $H_1 = 5$ ע"י D אצל שחקן 1. $L_2 = -5$ ע"י D ו- $H_2 = -5$ ע"י A אצל שחקן 2. באופן כללי במשחק סכום אפס נקבל: $-L_1 = H_2$, $-L_2 = H_1$. נציין כי אסטרטגיית הענשה תקרא גם אסטרטגית מינימקס וגם אסטרטגיית רמת ביטחון משופרת.

מודל קורנו (תחרות כמויות)

בשוק מספר פירמות. לכל פירמה יש פונקציית הוצאות שמראה את העלות שלה לייצור כל רמת תפוקה. כל פירמה הטמינה מרגל אצל כל יריביה. תפקיד המרגל הוא למסור לפירמה מטעמה הוא מרגל את היקף התפוקה המיוצגת בפירמה בה הוא מרגל.

פונקציית הביקוש- תראה כמה יחידות הצרכנים ירצו לקנות בכל מחיר וגם מהו המחיר שמתאים למכירת כל כמות.

$$TC_1(q_1) = q_1^2$$

$$TC_2(q_2) = 30q_2$$

$$Q = 120 - P \rightarrow P = 120 - Q$$

ננתח את המשחק: ישנן אינסוף אסטרטגיות. 120 יחידות סה"כ ולכן 120 אסטרטגיות "הגיניות". נסתכל למשל על האסטרטגיה: $(q_1, q_2) = (40, 20)$. הרווחים מחושבים לפי: $\pi = TR - TC$. מתקבל:

$$\pi_1 = 60 * 40 - 40^2 = 800$$

$$\pi_2 = 60 * 20 - 30 * 20 = 600$$

נציג בטבלה:

	0	...	20	...	$34\frac{2}{7}$	...
0	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
$21\frac{3}{7}$	...	...	...	...	(918, 1175)	...
...	...	...	...	...	...	...
40	...	...	(800, 600)	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

עבור בדיקת ש"מ צריך לבדוק את כל השורה ואת כל העמודה. למשל נבדוק האם $(q_1, q_2) = (40, 20)$ הינו

ש"מ נאש: בדיקה ראשונה היא: $40 \in BR_1(20)$ עלינו

לנסח פונקציית מטרה שבה נבדוק מתי π_1 מגיעה

למקסימום (800 או יותר) כשהממות היא 20:

$$\max \pi_1(q_1, q_2 = 20) = (120 - (q_1 + 20)) * q_1 - q_1^2 =$$

$$120q_1 - q_1^2 - 20q_1 - q_1^2 = 100q_1 - 2q_1^2$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 100 - 4q_1 = 0 \rightarrow q_1 = 25$$

$$\pi_1(q_1 = 25, q_2 = 20) = 75 * 25 - 25^2 = 1250$$

$$BR_1(20) = \{25\}$$

כעת יש לבדוק האם $(25, 20)$ הינו ש"מ נאש:

נבנה את חוקיות ההחלטות המיטביות של שחקן 1:

$$\max \pi_1(q_1, q_2) = (120 - (q_1 + q_2)) * q_1 - q_1^2 =$$

$$120q_1 - q_1^2 - q_1q_2 - q_1^2 = 120q_1 - 2q_1^2 - q_1q_2$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 120 - 4q_1 - q_2 = 0 \rightarrow BR_1: q_1 = \frac{120 - q_2}{4}$$

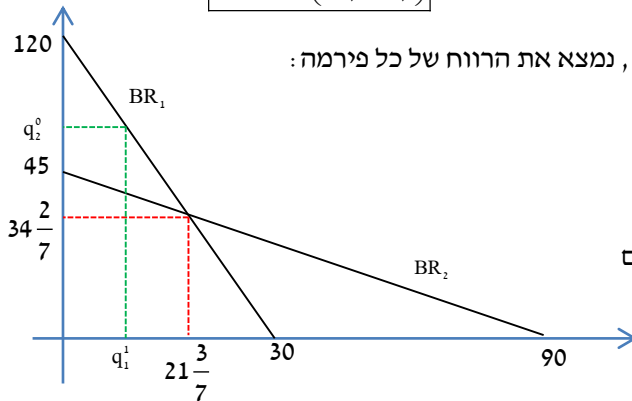
נבנה את חוקיות ההחלטות המיטביות של שחקן 2:

$$\max \pi_2(q_1, q_2) = (120 - (q_1 + q_2)) * q_2 - 30q_2 =$$

$$120q_2 - q_1q_2 - q_2^2 - 30q_2 = 90q_2 - q_1q_2 - q_2^2$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 90 - q_1 - 2q_2 = 0 \rightarrow BR_2: q_2 = \frac{90 - q_1}{2}$$

$$(q_1, q_2) = \left(21\frac{3}{7}, 34\frac{2}{7}\right): \text{ומכאן הכמויות בש"מ: } q_1 \in BR_1(q_2) \quad q_2 \in BR_2(q_1)$$



נמצא את המחיר: $Q = q_1 + q_2 = 55\frac{5}{7} \rightarrow P = 64\frac{2}{7}$, נמצא את הרווח של כל פירמה:

$$\pi_1 = 64\frac{2}{7} * 21\frac{3}{7} - \left(21\frac{3}{7}\right)^2 = 918\frac{18}{49}$$

$$\pi_2 = 64\frac{2}{7} * 34\frac{2}{7} - 30 * 34\frac{2}{7} = 1175\frac{25}{49}$$

בכל יום כיוונו את המכונות בהתאם למה שהמרגלים סיפרו וכך הגיעו בסופו של דבר להתכנסות.

מודל ברטרנד (תחרות מחירים)

מודל זה מאד דומה למכרז. ישנן מס' פירמות מתחרות בשוק. לכל פירמה פונקציית עלויות כתלות בתפוקתה. כל פירמה קובעת מחיר שתדרוש לכל יח'. הצרכנים ילכו לפירמה שקבעה את המחיר הנמוך ביותר. ישנם פערים בין הסיפור הנ"ל לתיאור המשחק:

-מהן הצעות המחיר האפשריות

-כלל ההכרעה במקרה של שוויון בהצעות הנמוכות.

ברירות המחדל:

-הצעות מחיר שלמות, אי שליליות.

-חלוקה שווה בין המציעות הזולות.

הערה: הפירמה הזוכה מחויבת לספק את כל הביקוש.

בשוק 2 פירמות:

$$Q = 120 - P$$

דוגמא

במקרה זה שחקן 3 יזכה וישלם 44, האם זהו ש"מ נאש?
 $(V_1, V_2, V_3) = (45, 37, 50)$ ו- $(b_1, b_2, b_3) = (42, 43, 44)$. לא ש"מ נאש כיוון ששחקן 1 יסטה ל-44. אם למשל היה $(b_1, b_2, b_3) = (44, 44, 45)$ אזי 44 ש"מ נאש. דוגמא נוספת לש"מ נאש היא $(b_1, b_2, b_3) = (48, 48, 47)$. נשים לב לכך שחלק מהשחקנים מציעים הצעה יותר ממה שהם חושבים שהמוצר שווה. נניח שזכינו כשהצענו 49. והמידע על ההצעות האחרות לא גלוי. עולה הסוגיה: האם אני לא באמת יודע להעריך נכון את שווי המוצר. סוגיה זו מכונה: "קללת המנצח". דבר כזה יכול להרחיק אנשים ממכרזים.

מכרז מחיר שני

זהה למכרז מחיר ראשון, פרט לכך שהזוכה ישלם את גובה ההצעה השנייה. זה בא לפתור לנו את "קללת המנצח". נראה למשל, ש"מ נאש: $(b_1, b_2, b_3) = (1, 70, 2)$. שחקנים 1 ו-3 ירצו לסטות ל-70. ניתן לזכות גם כשהמוצר לא באמת מגיע לך. $(b_1, b_2, b_3) = (45, 37, 50)$ הינו ש"מ נאש. במקרה זה שחקן 3 זוכה ומשלם 45.

שאלה 5 מתוך מבחן 11.11.2014

5.2. הנח כי בשוק 3 צרכנים ויצרן יחיד. היצרן מוציא יחידת מוצר למכרז. כל צרכן יכול להציע מחיר חיובי (גדול מאפס) שלם באופן חד פעמי. היחידה תימכר לבסוף לצרכן שיציע את ההצעה הרחוקה ביותר מממוצע ההצעות של יריביו, והצרכן הזוכה ישלם על יחידת המוצר מחיר השווה לגובה ההצעה שלו עצמו. במקרה ששני שחקנים כלשהם, או יותר, רחוקים במידה שווה מממוצע ההצעות של יריביהם, ואין שחקן הרחוק יותר מממוצע ההצעות של יריביו, שחקן 1 יזכה במוצר, וישלם את גובה הצעתו. שווי המוצר עבור הצרכנים הינו $v_1 = 35$, $v_2 = 44$, $v_3 = 55$. מכאן,

א. ההצעה $b_1 = 15$ היא תגובה אופטימלית של שחקן 1 כנגד שילוב ההצעות $b_2 = 40$, $b_3 = 15$.

ב. ההצעה $b_1 = 1$ היא תגובה אופטימלית של שחקן 1 כנגד שילוב ההצעות $b_2 = 40$, $b_3 = 16$.

ג. ההצעה $b_1 = 34$ היא תגובה אופטימלית של שחקן 1 כנגד שילוב ההצעות $b_2 = 39$, $b_3 = 16$.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

כל התשובות נכונות. נראה אם שחקן 1 יכול לשפר את מצבו: אם נבחר עבור שחקן 1 $b_1 = 1$ נהיה הכי רחוקים שנוכל, כלומר: $\frac{1+15}{2} = 8$, המרחק של 8 מ-40 הוא 32, לעומת זאת המרחק של 1 מ-27.5 הוא 26.5 $\left(\frac{b_2 + b_3}{2} = \frac{40 + 15}{2} = 27.5\right)$. קיבלנו שלא נוכל לשפר את מצבו של שחקן 1 ולכן אלה תגובות אופטימליות.

שאלה 5.2 מתוך מבחן 1.8.2014

5.2. הנח כי בשוק 3 צרכנים ויצרן יחיד. היצרן מוציא יחידת מוצר למכרז. כל צרכן יכול להציע מחיר חיובי (גדול מאפס) שלם באופן חד פעמי.

- היחידה תימכר לבסוף לצרכן שיציע את ההצעה הקרובה ביותר למחיר 60 והצרכן הזוכה ישלם על יחידת המוצר מחיר השווה לגובה ההצעה שלו עצמו.
- במקרה ששני שחקנים כלשהם, או יותר, קרובים למחיר 60 במידה שווה (גם אם אינם הקרובים ביותר), שחקן 2 יזכה במוצר, וישלם סכום השווה למרחק הצעתו מ-50.
- שווי המוצר עבור הצרכנים הינו $v_1 = 50$, $v_2 = 20$, $v_3 = 55$.

א. ההצעה $b_1 = 70$ היא תגובה אופטימלית של שחקן 1 כנגד שילוב ההצעות $b_2 = 40$, $b_3 = 50$.

ב. ההצעה $b_1 = 55$ היא תגובה אופטימלית של שחקן 1 כנגד שילוב ההצעות $b_2 = 65$, $b_3 = 20$.

ג. ההצעה $b_2 = 60$ היא תגובה אופטימלית של שחקן 2 כנגד שילוב ההצעות $b_1 = 55$, $b_3 = 60$.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א. שחקן 1 לא זוכה כלל. שחקן 1 עם $b_1 = 70$ ושחקן 3 עם $b_3 = 50$ רחוקים באותה מידה מ-60, כאן שחקן 2 זוכה במוצר. על שחקן 1 להציע יותר מ-50 אם רוצה לזכות במוצר ובמקרה זה הוא מפסיד, שכן $v_1 = 50$. מצב זה נחשב לתגובה אופטימלית, שכן שחקן 1 לא בזבז את כספו (אם היה מבזבז היה מקבל מוצר שהיה עולה לו יותר מהתועלת אותה היה משיג).

ב. גם כאן שחקן 1 $b_1 = 55$ עם ושחקן 2 עם $b_2 = 65$ רחוקים באותה מידה מ-60 ולכן שחקן 2 זוכה. גם כאן זו תגובה אופטימלית (אותו נימוק כמו ב-א').

ג. לא נכון, כיוון שאם $b_2 = 55$ אזי 2 זוכה ואז משלם 5. ואילו כאשר $b_2 = 60$ אזי שחקן 2 משלם 10. לסיכום: א' ו-ב' נכונות ולכן תשובה ד'.

שאלה 5 מתוך מבחן demo 2012

5.1. הנח כי בשוק קבוצת צרכנים וכן 3 יצרנים, ולכל אחד מהם עלות יצור של 20 ₪ ליחידה. כל יצרן קובע מחיר שלם בו הוא מחויב לספק כל כמות שתבוקש. הצרכנים יקנו מהיצרן שקבע את המחיר הזול ביותר. במידה ומספר יצרנים קבעו את המחיר הזול ביותר, הביקוש מתחלק ביניהם באופן שווה. הנח כי הביקוש בכל מחיר עד 23 ₪ יהיה 30 יח' וכל עליית מחיר ב-1 ₪ תביא לירידה בביקוש ב-6 יח' (כמובן עד מחיר 28). מכאן,

א. אם שלוש היצרנים קובעים מחיר 23, נקבל שווי משקל נאש.

ב. קיים שווי משקל נאש יחיד.

ג. אם שני יצרנים קבעו מחיר 27, התגובה האופטימלית של היצרן השלישי היא קביעת מחיר 26.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

נרשום (משמאל) את הכמות כתלות במחיר, נשים לב שמעל למחיר 28 אין ביקוש כלל: $Q^D = \begin{cases} 30 & p \leq 23 \\ 24 & p = 24 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & p \geq 28 \end{cases}$
 א. אם מישוהו יורד מהמחיר 23 ל-22 אזי הוא זוכה בכל השוק וזה כדאי לו, כלומר כדאי לסטות ולכן $(23, 23, 23)$ לא ש"מ נאש.
 ב. קיימים 2 ש"מ נאש והם $(21, 21, 21)$ - אם מורידים את המחיר לא מרוויחים, שכן $Q^D = 0$ $p \geq 28$ זהו יצור של כל יחידה ואם יצרן מעלה את המחיר אזי לא יקנו ממנו ולכן אין סטייה, זהו ש"מ נאש.
 השני הוא $(20, 20, 20)$, זהו המחיר הזול ביותר, אף אחד לא ירצה להוריד במחיר שכן אז הוא במצב הפסד ואף אחד לא ירצה להעלות את המחיר שכן אז לא יקנו ממנו כלל.
 ג. נראה ש: $BR_3(27, 27) \neq 26$, אם מציעים 26 אזי נרוויח $12 \cdot (26 - 20) = 72$, לעומת זאת אם מציעים 25 למשל $18 \cdot (25 - 20) = 90$, רווח גבוה יותר.
 לסיכום: אין תשובה נכונה ולכן ד'.

5.2. הנח כי בשוק 3 צרכנים ויצרן יחיד. היצרן מוציא יחידת מוצר למכרז. כל צרכן יכול להציע מחיר שלם באופן חד פעמי. יחידת המוצר תימכר לבסוף לצרכן שציע את ההצעה הגבוהה ביותר שישלם על יחידת המוצר מחיר השווה לגובה ההצעה הממוצעת של 3 הצרכנים (גם אם הממוצע לא שלם). במקרה ששני שחקנים כלשהם, או יותר, הציעו אותה הצעה, שחקן מס' 1 יזכה במוצר, והאחרים לא יזכו. שווי המוצר עבור הצרכנים היו $v_1 = 35$, $v_2 = 38$, $v_3 = 30$. מכאן,

א. שילוב ההצעות $b_1 = 34$, $b_2 = 33$, $b_3 = 32$ הינו שווי משקל נאש.

ב. שילוב ההצעות $b_1 = 34$, $b_2 = 0$, $b_3 = 34$ הינו שווי משקל נאש.

ג. שילוב ההצעות $b_1 = 20$, $b_2 = 20$, $b_3 = 32$ הינו שווי משקל נאש.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

נניח ששחקן 1 ישלם את הממוצע.

א. שחקן 1 זוכה ומשלם את הממוצע, 33. הוא הרוויח 2. (שחקן 1 יכל לסטות ל-32 וגם היה זוכה, כיוון שאז ההצעה זהה להצעה של שחקן 3). תשובה לא נכונה.
 ב. 1 זוכה ומשלם 68/3. זה לא ש"מ נאש כיוון שאם היה מציע 0 עדיין היה זוכה (הצעה זהה לשחקן 2 ואז 1 זוכה..). תשובה לא נכונה.
 ג. שחקן 2 יכול לסטות ל-33 ואז יזכה, מכאן שזהו לא ש"מ. תשובה לא נכונה.
 נסכם: אין תשובה נכונה ולכן ד'.

5.3. הנח כי בשוק 30 צרכנים (כל אחד מעוניין ביחידה אחת) וכן 3 יצרנים. יצרן 1 קובע מחיר שלם אי שלילי, לאחר מכן כל יצרן מתחרה יספק 10 יחידות או לא יספק כלל. יצרן 1 מחויב לספק את כל יתרת הכמות שלא סיפקו יצרן 2 ויצרן 3. הנח כי ליצרן 1 עלות יצור של 30 ₪ ליח', ליצרן 2 וליצרן 3 עלות יצור של 25 ₪ ליח', וכי הצרכנים לא יקנו אם המחיר מעל 35 ₪ ליח'. מכאן,

א. קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי בו יצרן 1 יקבע מחיר נמוך מ-30.

ב. קיים שיווי משקל בו יצרן 1 יקבע מחיר 30.

ג. קיים שיווי משקל בו יצרן 1 יקבע מחיר 25.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א' לא נכון מכיוון שבתת משחק פרפקטי יקבע מחיר של 35, כיוון שיצרנים 2 ו-3 ייצרו בכל מקרה. ב' ו-ג' גם הם לא נכונים כיוון שאם יצרן 1 קובע מחיר אזי הוא מפסיד, מכאן ג' לא נכון. עבור ב', נניח שיצרן 1 מוכן ליצר ללא רווח, קביעת מחיר שונה מ-35 יכולה לנבוע מכך שאחד משני היצרנים האחרים החליט לא לייצר ואז יצרן 1 יספק יותר יחידות, אבל מצב שכזה לא אופטימלי לשחקנים 2,3 מכיוון שכן כדאי להם לייצר.

שאלה 2 מתוך תרגיל כיתה מס' 2

במפעל ליצור חליפות שתי מחלקות: מחלקה "עליון" שמייצרת חלק עליון ומחלקת "תחתון" שמייצרת חלק תחתון. עלות היצור של חלק עליון היא 3 ושל חלק תחתון היא 6. פונקציית הביקוש של השוק היא $q = 120 - p$. המפעל קובע מחיר p שממקסם את רווחיו. הפדיון מחולק שווה בשווה בין שתי המחלקות, שלאחר כסוי הוצאות היצור מחלקות את כל הרווחים לעובדיהן. לאחר שהעובדים במחלקת "תחתון" התמרמרו על אי הצדק שבחלוקה השווה (כי עלויותיהם גבוהות יותר) הוחלט שכל מחלקה תקבע מחיר עבור החלק שהיא מייצרת: p_u, p_d . המפעל ישווק את החליפה המלאה במחיר $p = p_u + p_d$.

א. מצא את שווי המשקל לפני השינוי. כמה כל מחלקה מרוויחה לפני השינוי?
ב. מצא את שווי המשקל אחרי השינוי. האם השנוי השתלם לעובדי מחלקת "עליון"? מחלקת "תחתון"?
ג. לאחר השינוי, מצא אסטרטגיה שולטת חזק עבור מחלקת עליון, או הסבר למה אין כזו.
פתרון:

א. נסמן את הרווח ב- π ונבנה את פונקציית הרווח:

$$\pi^p(p) = TR - TC = p(120 - p) - (3 + 6)(120 - p) = (p - 9)(120 - p)$$

נגזור את הפונקציה ע"מ למצוא את p כך שהרווחים מקסימליים:

$$\frac{\partial(\pi^p(p))}{\partial p} = \frac{\partial(120p - 1080 - p^2 + 9p)}{\partial p} = 129 - 2p = 0 \rightarrow p = 64.5, q = 55.5$$

מקבלים שהפדיון הוא $3579.75 = 55.5 * 64.5$, מתחלק שווה בשווה לכל מחלקה, כלומר 1789.875 לכל מחלקה. עבור מחלקת "עליון" הוצאות של $3 * 55.5 = 166.5$ ולכן נשארת עם רווח של 1623.375 ואילו עבור מחלקת "תחתון" הוצאות של $6 * 55.5 = 333$ ולכן נשארת עם רווח של 1456.875.

ב. נבנה את פונקציית התועלת: $u_U(p_U, p_D) = (p_U - 3)(120 - (p_U + p_D))$, נגזור ע"מ לקבל את התגובה

$$\frac{\partial u_U(p_U, p_D)}{\partial p_U} = 120 - 2p_U - p_D + 3 = 0 \rightarrow BR_U: p_U = \frac{123 - p_D}{2}$$

בונים את הפונקציה עבור מחלקת "תחתון" ומקבלים את התגובה האופטימלית:

$$BR_D: p_D = \frac{126 - p_U}{2} \quad (p_D, p_U) = (43, 40)$$

והכמות הכוללת היא 37. הרווח הינו זהה: $\pi_U = \pi_D = 37^2 = 1369$. 2 המחלקות הפסידו!

ג. אסטרטגיה שולטת חזק ל-U זה אומר שיש עמודה שבה כל הערכים יהיו יותר גבוהים מערכי כל העמודות האחרות. 40 היא הכי טובה כנגד 43, אך אין עמודה שבה היא הכי טובה כנגד מקום אחד ולכן זו לא אסטרטגיה שולטת חזק.

אסטרטגיות מעורבות

נניח שלשחקן i יש קבוצת אסטרטגיות X_i . אסטרטגיה מעורבת לשחקן i היא פונקציית הסתברות המוגדרת על האיברים ב- X_i .

דוגמא- נניח $X_1 = \{a, b, c\}$ אסטרטגיה מעורבת לדוגמא היא למשל:

$$\left. \begin{array}{l} p(a) = 0.4 \\ p(b) = 0.5 \\ p(c) = 0.1 \end{array} \right\} \Rightarrow p = (0.4, 0.5, 0.1)$$

כלומר, יש לנו פונקציה המקיימת: $p: X_1 \rightarrow [0, 1]$, כאשר $\sum_{x_1 \in X_1} p(x_1) = 1$.

ההיגיון העומד מאחורי אסטרטגיה מעורבת הוא שאסטרטגיה אינה חייבת להיות חד משמעית! נוכל תחת תנאים מסוימים לבנות אינדקס תועלת, כך שתוחלת התועלת תשקף את מערכת ההעדפות של הפרט ע"פ הגרלות שונות. נניח שבמשחקים שנתנאר בהמשך, התשלומים בנויים כבר בצורה שמותאמת לשיפוטם ע"י תוחלת התשלום.

דוגמא

	C	D	0.25,0.75
A	7,8	5,9	5.5,8.75
B	4,10	6,7	5.5,7.75
0.5,0.5	5.5,9	5.5,8	
0.75,0.25	6.25,8.5	5.25,8.5	5.5,8.5

משפט נאש - תחת תנאים בסיסיים (שאצלנו תמיד מתקיימים) תמיד קיים ש"מ כאשר משתמשים באסטרטגיות מעורבות.

נרצה למצוא ש"מ שכזה. נצטרך למצוא מפגש של 2 אסטרטגיות: $(\beta, 1-\beta)$, $(\alpha, 1-\alpha)$. בש"מ הצרכן צריך להיות אדיש בין 2 האסטרטגיות. שחקן 2 "יערבב" כך שיגרום לשחקן 1 להיות אדיש כשהוא "יערבב". צריך למצוא את התמהיל הנכון.

הערה: כדי שערבוב של מספר אסטרטגיות (טהורות) יהווה תגובה אופטימלית לאסטרטגיה נתונה של היריב צריך שכל אחת מהאסטרטגיות המערבבות תיתן את הערך הגבוה ביותר ולכן כולן יתנו את אותו ערך. בדוגמא שלנו $(\beta, 1-\beta)$ של שחקן 2 צריכה לגרום לאיזון בין A ל-B אצל שחקן 1 (כדי ששחקן 1 ירצה לעבור ביניהם) ואז נבדוק מהו $(\alpha, 1-\alpha)$ שיגרמו לשחקן 2 לערבב.

$$u_1(A, (\beta, 1-\beta)) = u_1(B, (\beta, 1-\beta))$$

$$7 * \beta + (1-\beta) * 5 = 4 * \beta + (1-\beta) * 6$$

$$3 * \beta = (1-\beta) \rightarrow \beta = 0.25 \rightarrow (0.25, 0.75)$$

$$BR_1(0.25, 0.75) = \{(\alpha, 1-\alpha) ; 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

כלומר אם שחקן 2 ינקוט באסטרטגיה $(0.25, 0.75)$ יקבל 5.5. מצד שני:

$$u_2((\alpha, 1-\alpha), C) = u_2((\alpha, 1-\alpha), D)$$

$$8 * \alpha + (1-\alpha) * 10 = 9 * \alpha + (1-\alpha) * 7$$

$$3 * (1-\alpha) = \alpha \rightarrow \alpha = 0.75 \rightarrow (0.75, 0.25)$$

נראה שימוש באסטרטגיות מעורבות בתהליך הרחקה סדרתי של אסטרטגיות טהורות:

דוגמא

	D	E
A	7,6	11,5
B	8,7	8,12
C	10,7	6,6

הרחקה 1: האסטרטגיה B נשלטת חזק ע"י תמהיל $(0.5, 0, 0.5)$ אצל שחקן 1 ולכן מורחקת

	D	E
A	7,6	11,5
B	8,7	8,12
C	10,7	6,6
(0.5, 0, 0.5)	8.5,*	8.5,*

	D	E
A	7,6	11,5
C	10,7	6,6

הרחקה 2: האסטרטגיה E נשלטת חזק ע"י D אצל שחקן 2 ולכן מורחקת

	D	E
A	7,6	11,5
C	10,7	6,6

	D
A	7,6
C	10,7

הרחקה 3: האסטרטגיה A נשלטת חזק ע"י C אצל שחקן 1 ולכן מורחקת

	D
C	10,7

קיבלנו את הפתרון (C,D) אשר מקיים את 2 התכונות: 1. ש"מ נאש. 2. ש"מ נאש יחיד (כולל מעורבות).

נראה דרך למציאת ש"מ כאשר יש יותר מ-2 אסטרטגיות לשחקן

דוגמא-

	D	E
A	8,9	7,6
B	7,10	9,12
C	6,5	10,4

לפי אסטרטגיות טהורות בלבד (A,D) הינו ש"מ.

נסתכל על אסטרטגיות מעורבות:

	D	E	$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
A	8,9	7,6	23/3, *	7.5, *
B	7,10	9,12	23/3, *	8, *
C	6,5	10,4	22/3, *	8, *
$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$	*,48/5	*,48/5	ש"מ $\left(\frac{23}{3}, \frac{48}{5}\right)$	

נראה שלא קיים ש"מ בו שחקן 1 נותן הסתברויות חיוביות רק ל-A ול-C: אם שחקן 1 מערבב בין A ל-C, בשיווי משקל, זה מכיוון שהוא אדיש ביניהן וזה יכול לקרות רק במידה ושחקן 2 ערבב E ו-D והוא אדיש ביניהן, זה לא יכול לקרות כנגד A ו-C. אין יתרון של D על E ולהיפך, ולכן נראה כי נוכל לאזן ביניהן.

נבדוק האם קיים ש"מ שבו שחקן 1 מערבב את A ו-B:

נבדוק אם ערבוב A ו-B ישכנע את 2 לערבב את E, D:

$$u_2((\alpha, 1-\alpha, 0), D) = u_2((\alpha, 1-\alpha, 0), E)$$

$$9\alpha + 10*(1-\alpha) = 6\alpha + 12(1-\alpha)$$

$$3\alpha = 2(1-\alpha) \rightarrow \alpha = 2/5$$

נערבב את E, D כך ששחקן 1 יהיה אדיש בין B, A:

$$u_1(A, (\beta, 1-\beta)) = u_1(B, (\beta, 1-\beta))$$

$$8\beta + 7*(1-\beta) = 7\beta + 9(1-\beta)$$

$$\beta = 2(1-\beta) \rightarrow \beta = 2/3$$

כלומר זוג האסטרטגיות $\left(\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$ מהווה ש"מ מעורב.

נבדוק: האם קיים ש"מ שבו שחקן 1 מערבב את C ו-B בלבד?

$$u_2((0, \alpha, 1-\alpha), D) = u_2((0, \alpha, 1-\alpha), E)$$

$$10\alpha + 5*(1-\alpha) = 12\alpha + 4(1-\alpha)$$

$$2\alpha = (1-\alpha) \rightarrow \alpha = 1/3$$

$$u_1(B, (\beta, 1-\beta)) = u_1(C, (\beta, 1-\beta))$$

$$7\beta + 9*(1-\beta) = 6\beta + 10(1-\beta)$$

$$\beta = (1-\beta) \rightarrow \beta = 1/2$$

כלומר זוג האסטרטגיות $\left(\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ מהווה ש"מ מעורב.

טענה: לא קיים ש"מ מעורב כאשר שחקן 1 מערבב את A,B,C בהסתברות חיובית.
הוכחה: צריך להתקיים $u_1(A, (\beta, 1-\beta)) = u_1(B, (\beta, 1-\beta)) = u_1(C, (\beta, 1-\beta))$, אך לא קיימת β שאכן מקיימת את 3 השוויונות.

רמת ביטחון אסטרטגיות מעורבות

עד כה הכרנו 2 סוגי רמות ביטחון:

1. L_i תשלום ששחקן i יכול להבטיח שיקבל (MaxMin) - רמת ביטחון.
2. H_i תשלום שיריבי שחקן i יכולים להבטיח ששחקן i לא יעבור (MinMax) - רמת ביטחון משופרת.
נראה למשל לפי הערכים ב-דוגמא:
שחקן 1:

$$L_1 = \max(\min(8, 7), \min(7, 9), \min(6, 10)) = \max(7, 7, 6) = 7$$

$$H_1 = \min(\max(8, 7, 6), \max(7, 9, 10)) = \min(8, 10) = 8$$

שחקן 2:

$$L_2 = \max(\min(9, 10, 5), \min(6, 12, 4)) = \max(5, 4) = 5$$

$$H_2 = \min(\max(9, 6), \max(10, 12), \max(5, 4)) = \min(9, 12, 5) = 5$$

רמת ביטחון מעורבת לשחקן 1 בודקת את המקסימום ע"פ כל האסטרטגיות של שחקן 1:

$$l_1^{\max} = \max_{(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)} \left(\min_{x_1} u_1((\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta), x_1) \right)$$

רמת ביטחון משופרת מעורבת לשחקן 1:

$$h_1^{\max} = \min_{(\beta, 1-\beta)} \left(\max_{x_1} u_1(x_1, (\beta, 1-\beta)) \right)$$

למשל עבור $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ נקבל:

$$\min u_1 = 7.4$$

$$\frac{2}{5} * 8 + \frac{3}{5} * 7 = 7.4$$

$$\frac{2}{5} * 7 + \frac{3}{5} * 9 = 8.2$$

$$u_1 = (7.4, 8.2)$$

ברגע שיהיו מאוזנים נדע שהגענו לערבוב הטוב ביותר. כדי למצוא את השימוש ב-A,B בצורה הטובה ביותר, ננסה לאזן את ערכי התשלום בשניהם עבור שחקן 1:

$$8\alpha + 7 * (1-\alpha) = 7\alpha + 9(1-\alpha)$$

$$\alpha = 2(1-\alpha) \rightarrow \alpha = 2/3 \rightarrow \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \quad (\alpha, 1-\alpha, 0)$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), 7\frac{2}{3}, 7\frac{2}{3}, 7\frac{2}{3}\right)$$

D,E:

$$8\alpha + 6 * (1-\alpha) = 7\alpha + 10(1-\alpha)$$

$$\alpha = 4 * (1-\alpha) \rightarrow \alpha = 0.8 \rightarrow \boxed{0.8}$$

$$(0.8, 0, 0.2) \quad (\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$$

$$((0.8, 0, 0.2), 7.6, 7.6, 7.6)$$

בין B ל-C לא ניתן לאזן. ה"תמהיל" 6 ו-7 לעולם לא יהיה כמו 9 ו-10 ולכן כשנבחן את המינימום בין העמודות עדיף שיהיה 7. כלומר הכי טוב שיהיה B.

$$8\alpha + 7\beta + 6(1 - \alpha - \beta) = 2\alpha + \beta + 6$$

$$7\alpha + 9\beta + 10(1 - \alpha - \beta) = -3\alpha - \beta + 10$$

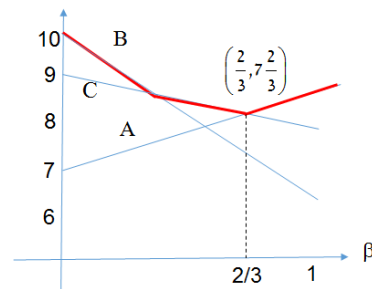
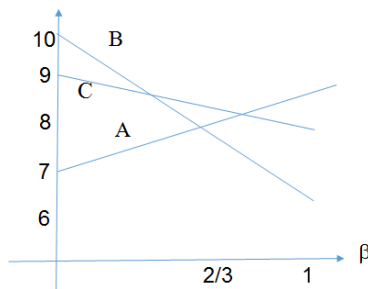
נניח למשל $\beta = 0.5$: נפתור את מערכת המשוואות ונקבל : $\alpha = 0.6 \rightarrow 2\alpha + 6.5 = -3\alpha + 3.5$, כלומר יצא לנו מצב בו $\alpha + \beta > 1$, לכן נבחר $\alpha = \beta = 0.5$ וזה יהיה האופטימום. זהו לא מצב של איזון.

באופן כללי עלינו לפתור : $\max_{\alpha, \beta \in [0,1]} (2\alpha + \beta + 6, -3\alpha - \beta + 10)$ כאשר $\alpha + \beta \leq 1$. מקבלים ש $l_1^{\max} = 7\frac{2}{3}$.

מהכיוון של שחקן 2 נמצא את $h_1^{\max}$ באופן הבא :

A	$8\beta + 7(1 - \beta) = 7 + \beta$
B	$7\beta + 9(1 - \beta) = 9 - 2\beta$
C	$6\beta + 10(1 - \beta) = 10 - 4\beta$

כאשר נחפש איזה β גורם לביטויים להיות קטנים ככל האפשר :



מתוך הפתרון הגרפי נסיק כי $h_1^{\max} = 7\frac{2}{3}$

משפט- במשחק 2 שחקנים מתקיים : $h_1^{\max} = l_1^{\max}$

משפט- בכל משחק $H_i \geq h_i \geq l_i \geq L_i$ לכל i . הוכחה :

נוכיח : $h_i \geq l_i$, לשם כך נניח בשלילה $h_i < l_i$:

לשחקן i יש אסטרטגיה p_i שעבורה לכל q_{-i} מתקיים $u_i(p_i, q_{-i}) \geq l_i$. אם ליריבי השחקן i יש אסטרטגיה q_i ' שמבטיחה ששחקן i יקבל לכל p_i ' $u_i(p_i', q_{-i}') \leq h_i$. קיבלנו סתירה ולכן $h_i \geq l_i$.

תכונה : אם p_i משיגה לפחות l_i כנגד אסטרטגיות טהורות של היריבים אז היא תשיג לפחות l_i כנגד אסטרטגיות מעורבות של היריבים.

שאלה 1 מתוך מבחן 1.8.2014

נתון משחק בצורה נורמלית, 2 שחקנים. שחקן 1 בוחר שורה ושחקן 2 בוחר עמודה.

	$Y1$	$Y2$
$X1$	6,6	7,5
$X2$	10,2	4,3
$X3$	5,3	8,4

בהמשך השאלה, הנח כי כל אסטרטגיה מעורבת לשחקן 1 תהיה מהצורה $p = (\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta)$ ועבור שחקן 2

מהצורה $q = (\gamma, 1 - \gamma)$.

נתח את המשחק :

עבור שליטה על $X1$ צריך ש 10 ו-5 יעברו 6 ובנוסף צריך ש-4 ו-8 יעברו 7. נבדוק האם ערוב של $X2$ ו- $X3$ יכול לשלוט על $X1$:

$$\left. \begin{array}{l} 0\alpha + 5(1 - \alpha) > 6 \rightarrow \alpha > 0.2 \\ 4\alpha + 8(1 - \alpha) > 7 \rightarrow \alpha < 0.25 \end{array} \right\} \rightarrow 0.2 < \alpha < 0.25$$

מסקנה: קיים ערבוב של X_1, X_3 ששולט על X_2 . לדוגמה האסטרטגיה $(0, 0.22, 0.78)$ שולטת על X_1 ולכן X_1 מורחק מהמשחק. בעקבות הרחקת X_1 ניתן לבצע עוד הרחקה: Y_1 נשלטת ע"י Y_2 אצל שחקן 2 ולכן תורחק גם היא. בעקבות זאת X_2 נשלטת ע"י X_3 אצל שחקן 1 ולכן תורחק. הפתרון לפי אסטרטגיות טהורות הינו (X_3, Y_2) וזהו ש"מ נאש יחיד.

1.1

א. $(0.6, 0.4, 0) \in BR_1\left(\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)\right)$

ב. $(0.8, 0.2) \in BR_2((0.5, 0.5, 0))$

ג. $(0.1, 0, 0.9) \in BR_1((0.5, 0.5))$

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

	Y1	Y2	$\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
X1	6,6	7,5	46/7	6.5,*
X2	10,2	4,3	46/7	7,*
X3	5,3	8,4	47/7	6.5,*
(0.5, 0.5, 0)	*,4	*,4		

א' לא נכון כיוון שהתגובה האופטימלית לערבוב הנתון היא האסטרטגיה X3 בלבד (היא מניבה 47/7 ושתי האסטרטגיות האחרות מניבות פחות, לא יהיה נכון להוסיף לתמהיל.

התגובה היא מהצורה: $BR_1\left(\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)\right) = (0, 0, 1)$

ב' נכון מכיוון ש $BR_2((0.5, 0.5, 0)) = \{\gamma, (1-\gamma); 0 \leq \gamma \leq 1\}$, כששחקן 2 משחק ככה זה ייתן לו 4 בכל אחת מהאסטרטגיות (לא משנה אם כופלים בפרמטר γ כיוון שלא יעלה אותנו מעל-4). $(0.8, 0.2)$ הוא רק מקרה אחד מבין אינסופי המקיימים את התבנית $[\gamma, (1-\gamma); 0 \leq \gamma \leq 1]$. ג' לא נכון כיוון שאין סיבה להכניס לתמהיל את X1 (הורחק), ניתן למצוא תמהיל טוב יותר.

1.2

א. במשחק זה יש שיווי משקל אחד באסטרטגיות טהורות.

ב. זוג האסטרטגיות $(p = (0.5, 0, 0.5), q = (0.5, 0.5))$ הן שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

ג. קיים זוג אסטרטגיות מהצורה $(p = (\alpha, 1-\alpha, 0), q = (\beta, 1-\beta))$ כאשר $1 > \alpha, \beta > 0$ המהוות שיווי

משקל באסטרטגיות מעורבות.

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

א' נכון, מצאנו את (X_3, Y_2)

ב' לא נכון כיוון שזהו משחק פתיר ולכן קיים ש"מ יחיד.

ג' לא נכון כיוון שאסטרטגיה X_1 הורחקה ולכן לא נמהל אותה באסטרטגית ש"מ. לסיכום: ישנה רק

אסטרטגית ש"מ אחת והיא (X_3, Y_2) .

1.3

א. רמת הבטחון המשופרת (הטהורה) של שחקן 2 גבוהה מרמת הבטחון המשופרת (המעורבת) של שחקן 2.

ב. רמת הבטחון (הטהורה) של שחקן 2 נמוכה מרמת הבטחון (המעורבת) של שחקן 2.

ג. רמת הבטחון המשופרת (הטהורה) של שחקן 1 גבוהה מרמת הבטחון המשופרת (המעורבת) של שחקן 1.

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

שימוש באסטרטגיות מעורבות ישפר את הביצועים. נחשב ערכי מינימום ומקסימום לכל אסטרטגיה:

	Y1	Y2	$\min u_1$	$\max u_2$
X1	6,6	7,5	6	6
X2	10,2	4,3	4	3
X3	5,3	8,4	5	4
$\min u_2$	2	3		
$\max u_1$	10	8		

נרכז מתוך הטבלה את הקבועים:

$$L_1 = 6 \quad l_1 > 6$$

$$L_2 = 3 \quad l_2 = 3$$

$$H_1 = 8 \quad h_1 < 8$$

$$H_2 = 3 \quad h_2 = 3$$

יכולים להבטיח ששחקן 1 לא יקבל יותר מ-8, קיים ערוב שבו שחקן 2 מוריד את שחקן 1 למצב בו הוא מקבל פחות מ-8. נשים לב שמתקיים $H_2 = L_2 = 3$ ואז למעשה: $(H_2 = 3) \geq (h_2 = 3) \geq (l_2 = 3) \geq (L_2 = 3)$ כולם שווים!

א' לא נכון כיוון ש $H_2 = h_2 = 3$

ב' לא נכון כיוון ש $L_2 = l_2 = 3$

ג' נכון, מתקיים: $H_1 = 8, h_1 < 8 \rightarrow H_1 > h_1$

שאלה 2 מתוך מבחן 1.8.2014

נתון משחק בצורה נורמלית (מטריצה) של שני שחקנים. לכל שחקן יש 3 אסטרטגיות טהורות. נתון כי

$s = (0, 0.5, 0.5)$ היא תגובה טובה ביותר של שחקן 1 כנגד האסטרטגיה $q = (0.5, 0.2, 0.3)$ וגם כנגד

האסטרטגיה $t = (0.2, 0.8, 0)$ של שחקן 2.

נבנה את המטריצה:

	D	E	F	$q = (0.5, 0.2, 0.3)$	$t = (0.2, 0.8, 0)$
A				β	δ
B				α	γ
C				α	γ

כאשר $\gamma \leq \delta - 1 \leq \beta$ (כי הסכום הוא 1)

2.1

$$(0.5, 0, 0.5) \in BR_1(q) \quad \text{א.}$$

$$t \in BR_2(s) \quad \text{ב. אם } q \in BR_2(s) \text{ אז } t \in BR_2(s)$$

$$q \in BR_2(s) \quad \text{ג. אם } t \in BR_2(s) \text{ אז } q \in BR_2(s)$$

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א' נכון רק אם מתקיים $\beta = \alpha$, לא בהכרח מתקיים ולכן א' לא תשובה נכונה.
 ב' ערוב אסטרטגיות D, E, F וקיבל את הכי טוב שיכל ולכן אם זה BR, כלומר $q \in BR_2(s)$ אז גם ערוב של של אסטרטגיות D, E יתן את הכי טוב שאפשר והוא יהיה BR גם, כלומר $t \in BR_2(s)$. (היה מוכן לערבב 3 אסטרטגיות שנתנו לו את התגובה האופטימלית ולכן גם ערוב של 2 אסטרטגיות יהיה שייך לקבוצת התגובות האופטימליות). ב' היא התשובה הנכונה.
 ג' לא נכון, כאן השחקן היה מוכן לערבב 2 אסטרטגיות אך אין הבטחה שערוב עם אסטרטגיה נוספת יניב תגובה אופטימלית.

2.2

- א. אם זוג האסטרטגיות (s, q) הן שיווי משקל מעורב, אז גם (s, t) הן שיווי משקל מעורב.
- ב. אם זוג האסטרטגיות (s, t) הן שיווי משקל מעורב, אז גם (s, q) הן שיווי משקל מעורב.
- ג. אם זוג האסטרטגיות (s, t) הן שיווי משקל מעורב, אז (s, q) אינן שיווי משקל מעורב.
- ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.
- א' נכון וב' לא נכון מאותן סיבות כמו ב-2.1. ג' לא נכון כיוון שייתכן ותיכנס אסטרטגיה שלישית ואז ש"מ כן יהיה מעורב.

2.3

- א. אם t היא אסטרטגיית רמת בטחון (מעורבת) של שחקן 2 ואילו $r = (0, 0, 1)$ אינה אסטרטגיית רמת בטחון (טהורה) של שחקן 2, אזי בהכרח גם $u = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$ היא אסטרטגיית רמת בטחון (מעורבת) של שחקן 2.
- ב. אם t היא אסטרטגיית רמת בטחון (מעורבת) של שחקן 2 ואילו $r = (0, 0, 1)$ אינה אסטרטגיית רמת בטחון (טהורה) של שחקן 2, אזי בהכרח $u = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$ אינה אסטרטגיית רמת בטחון (מעורבת) של שחקן 2.
- ג. אם t היא אסטרטגיית רמת בטחון (מעורבת) של שחקן 2, ו- s אסטרטגיית רמת בטחון משופרת (מעורבת) כנגד שחקן 2, אז יתכן ש- $r = (0, 0, 1)$ אסטרטגיית רמת בטחון (טהורה) של שחקן 2.
- ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

עבור א' ו-ב': נמלא את הטבלה במספרים לדוגמא. בשביל להמחיש את הפתרון:

	D	E	F	$q = (0.5, 0.2, 0.3)$	$t = (0.2, 0.8, 0)$
A	4	4	4	β	δ
B	2	10	2	α	γ
C	10	2	10	α	γ

$t = (0.2, 0.8, 0)$ הינה אסטרטגיית רמת ביטחון מעורבת לשחקן 2. (אין קשר בין אסטרטגיה מעורבת וטהורה מבחינת רמת הביטחון). $r = (0, 0, 1)$ לא אסטרטגיית רמת ביטחון טהורה ל-2. ייתכן ו- $t = (0.2, 0.8, 0)$ תשיג מינימום גבוה יותר מ- $u = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$. אין לנו מושג... ולכן ג' תשובה נכונה שכן כתוב בתשובה "ייתכן".

טענה - בכל משחק, לכל שחקן מתקיים:

$$[רמת ביטחון] \geq [רמת ביטחון משופרת] \geq [תועלת בש"מ]$$

$$u_i^* \geq H_i \text{ כש } u_i^* \text{ הינו תשלום לשחקן } i \text{ בש"מ נאש טהור.}$$

שאלה 1 מתוך תרגול מס' 3

במשחק הבא, מצא את רמת הביטחון ורמת הביטחון המשופרת (רמת ענישה) עבור כל אחד מהשחקנים.

	L	M	R
U	1,2	2,3	2,4
D	2,3	4,1	1,2

$$H_1 = 2, \quad L_1 = 1, \quad 1 < h_1 < 2, \quad 1 < l_1 < 2$$

$$H_2 = 3, \quad L_2 = 2, \quad h_2 < 3, \quad 2 < l_2$$

שאלה 2 מתוך תרגול מס' 3

הוכח/הפרד

נתון משחק 2 שחקנים שבו קבוצת האסטרטגיות של שחקן 1 היא $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ושל שחקן 2 היא $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. נסמן ב- L_1 את רמת הבטחון של שחקן 1. אם $U_1(x_1, y_2) \geq L_1$ בשיווי משקל או $1 \leq j \leq n$.
 א. אם (x_1, y_2) בשיווי משקל אז $U_1(x_1, y_j) \geq L_1$ לכל j .
 ב. אם (x_1, y_2) וגם (x_2, y_1) בשיווי משקל אז $U_1(x_1, y_2) = U_1(x_2, y_1)$.
 פתרון:

א. נוכיח: (x_1, y_2) ש"מ נאש אז $u_1^* \geq H_1 \geq L_1$

$(0, 0)$ $(80, 80)$

ב. לא נכון, למשל:

$(0, 0)$ $(1, 1)$

דוגמא-נתון משחק סכום אפס הבא:

		β	$1-\beta$
		C	D
α	A	-3	2
$1-\alpha$	B	2	1
$(\alpha, 1-\alpha)$		$-\frac{7}{6}, 3\alpha - 2(1-\alpha)$	$-\frac{7}{6}, -2\alpha - 2(1-\alpha)$

$$\left. \begin{aligned} -3\beta + 2(1-\beta) &= 2\beta + (1-\beta) \\ (1-\beta) &= 5\beta \rightarrow \beta = 1/6 \end{aligned} \right\} \rightarrow (1/6, 5/6)$$

$$\left. \begin{aligned} 3\alpha - 2(1-\alpha) &= -2\alpha - (1-\alpha) \\ 5\alpha &= (1-\alpha) \rightarrow \alpha = 1/6 \end{aligned} \right\} \rightarrow (1/6, 5/6)$$

קיבלנו למעשה ששחקן 2 מקבל $-7/6$ ואז מערבב.

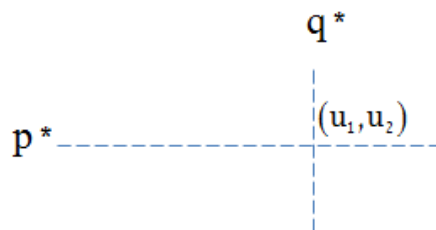
הפתרון הוא $((1/6, 5/6), (1/6, 5/6))$ כאשר: $u_1^{\max} = 7/6 = -u_2^{\max}$ ו- $L_1 = 1, L_2 = 7/6, l_1 = 7/6$

משפט המינימקס

אם (p^*, q^*) ש"מ מעורב במשחק סכום אפס אז (p^*, q^*) הינו אסטרטגיה (רמת ביטחון) מקסמין מעורבת של השחקנים. u_1 הכי גבוה בעמודה לשחקן 1, u_2 הכי נמוך בעמודה לשחקן 2, u_2 הכי גבוה ביחס לכל השורה, u_2 הכי נמוך ששחקן 2 משיג בעמודה זו. (p^*, q^*) הינו ש"מ מעורב, התשלומים הינם (u_1^*, u_2^*) כאשר $u_1^* = -u_2^*$. מתקיים ש $p^* \in BR_1(q^*)$ ואז לכל p' : $u_1(p^*, q^*) \geq u_1(p', q^*)$. במונחי שחקן 2 עבור q^* יתקיים לכל p' : $u_2(p^*, q^*) \leq u_2(p', q^*)$, כלומר: $u_2(p^*, q^*) = u_2(p', q^*) = \min u_2(p', q^*)$ וכל q' מתקיים $u_2(p^*, q^*) \geq u_2(p^*, q')$ כאשר זו התגובה האופטימלית $q^* \in BR_2(p^*)$. מכאן שעבור q' מסויים כלשהו $\min u_2(p', q') \leq u_2(p^*, q')$.

מבין הבאים: $\min u_2(q_1), \min u_2(q_2), \dots, \min u_2(q^*)$ הגבוה ביותר קורה כאשר שחקן 2 בוחר ב- q^*

וזה יתן את u_q , כלומר: $l_2 = u_2^*, l_1 = u_1^*$. במשחק בו 2 שחקנים בלבד: $l_2 = h_2 \rightarrow h_2 = -l_1$.



שאלה 1 מתוך תרגול מס' 4

נתון המשחק הבא:

	L	R
U	4,1	3,2
D	3,1	4,1

מצא את כל שוויי המשקל המעורבים:

לא קיים ש"מ בו שחקן 2 מערב את L ו-R כששחקן 1 מערב את U ו-D כי במקרה כזה שחקן 2 יעדיף לשחק R טהור. לכן השילוב היחיד שייתכן כדי ששחקן 2 יערבב את L ו-R הוא כאשר שחקן 1 בוחר D טהור. כדי ששחקן 1 יבחר D טהור צריך שיתקיים $u_1((0,1),q) \geq u_1((1,0),q)$.

$$3\beta + 4(1-\beta) \geq 4\beta + 3(1-\beta)$$

$$(1-\beta) \geq \beta \rightarrow \beta \leq 0.5$$

כלומר קיבלנו שכל זוג מהצורה $(0,1), (\beta, 1-\beta), \beta \leq 0.5$ יהיה ש"מ מעורב.

שאלה 2 מתוך תרגול מס' 4

נתון המשחק הבא:

	L	M	R
U	2,7	4,1	3,2
D	3,0	2,2	4,1

האם $((1/2, 1/2), (1/3, 1/3, 1/3))$ הוא ש"מ מעורב במשחק זה? מצא את כל שוויי המשקל המעורבים.

פתרון:

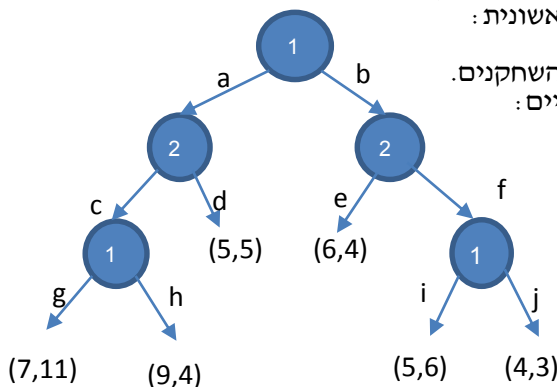
ראשית נבדוק קיום של אסטרטגיות נשלטות/ שולטות: עם L ו-M ניתן לשלוט על R (אצל שחקן 2), עושים זאת ע"י שנותנים משקל טיפה יותר מ-0.5. לדוגמא האסטרטגיה $(0.49, 0.51, 0)$ שולטת על R אצל שחקן 2. מסקנה: לא ייתכן ש R תקבל הסתברות חיובית באיזושהי תגובה אופטימלית של שחקן 2 לאסטרטגיה של שחקן 1 $(1/3, 1/3, 1/3)$. זה משאיר אותנו עם ש"מ בהם רק M ו-L מעורבות! יש ש"מ מטיפוס אחד בלבד בו שני השחקנים מערבים והוא:

$$\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)$$

	L	M
U	2,7	4,1
D	3,0	2,2

משחקים דינמיים-בצורת עץ

אלו משחקים בהם ניתן לבצע מניפולציות אחד על השני, כאשר השחקן בראש העץ קובע את המגמה הראשונית. נתבונן בדוגמא העץ הבא, בו שחקן 1 קובע את המגמה הראשונית:



מבנה של משחק בצורת עץ- קבוצת צמתים כשכל צומת משויך לאחד השחקנים. מכל צומת יוצאים מספר ענפי החלטות. לאחר כל ענף יגיע אחד מהשניים:

- א. צומת החלטה נוסף
- ב. עלה סופי- סיום המשחק ומידע לגבי התשלומים.

האסטרטגיה במשחק דינמי- האסטרטגיה לכל שחקן הינה מכלול ההחלטות שיקבל בכל צומת ששייך לו בענף. לדוגמא: (b,g,i) הינה אסטרטגיה לשחקן 1 ו- (c,f) הינה אסטרטגיה לשחקן 2. במשחק הדוגמא

ישנן $2^3 = 8$ אסטרטגיות לשחקן 1 ו $2^2 = 4$ אסטרטגיות לשחקן 2. ניתן לכתוב את התוצאות בצורת טבלה וממנה למצוא ש"מ.

נניח שבוחרים באסטרטגיה (a,h,i) עבור שחקן 1 ובאסטרטגיה (d,f) עבור שחקן 2 אזי ש"מ הינו $(5,5)$.
נניח שבוחרים באסטרטגיה (b,h,i) עבור שחקן 1 ובאסטרטגיה (d,f) עבור שחקן 2 אזי ש"מ הינו $(5,6)$.

שיטה למציאת ש"מ נאש- אינדוקציה לאחור Backward Ind.

1. בשלב הראשון כל שחקן שאחריו יש רק עלים סופיים יבצע בחירה אופטימלית. הצומת תומר (המרה) בעלה סופי בו רשומים התשלומים. נחזור על 1 עד שנגיע לראש הענף (שורש).

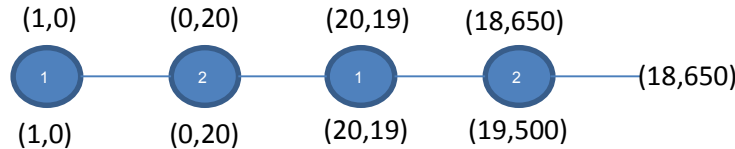
הערה: במקרי אדישות ייווצרו כפילויות של תוצאות.
בסיום פעולת האלגוריתם- נאסוף את ההחלטות השחקנים קיבלו לאורך העץ לכדי אסטרטגיות. במהלך פעולה זו אנו בעצם מבטלים כל "איום" לא אמין של היריב.

ש"מ תת-משחק פרפקטי SGP – Sub Game Perfect Eq- פרופיל אסטרטגיה נמצא ב-S.G.P אם בכל תת משחק בו יופעלו האסטרטגיות המותרות הן יקיימו ש"מ נאש. בדוגמא ש"מ נאש הינו $(b,g,i),(d,e)$.

משפט: האינדוקציה לאחור תוביל לאסטרטגית S.G.P.

דוגמא: משחק הזחל

במשחק זה אנו רואים שישנם מקומות בהם התשלומים גבוהים בהרבה לשני השחקנים ואילו ב-SGP יקבלו $(1,0)$



משחקי W.L.D (ניצחון, הפסד, תיקו)- במשחק WLD יש 3 תשלומים אפשריים לכל שחקן $\{1,0,-1\}$.
כאשר שחקן מסוים יקבל 1 השני יקבל -1, כששחקן מסוים יקבל 0 השני יקבל 0. (למשל, שחמט).
אסטרטגיה מנצחת- אסטרטגיה s_i תיקרא אסטרטגיה מנצחת של שחקן i אם לכל אסטרטגיה s_{-i} של היריב מתקיים: $u_i(s_i, s_{-i}) = 1$.

אסטרטגית תיקו- אסטרטגיה s_i תיקרא אסטרטגית תיקו לשחקן i אם לכל אסטרטגיה s_{-i} של היריב מתקיים: $u_i(s_i, s_{-i}) \geq 0$ וקיים s_{-i} כך ש $u_i(s_i, s_{-i}) = 0$.

משפט- בכל משחק WLD מתקיים אחד מהבאים:

1. לשחקן 1 יש אסטרטגיה מנצחת
 2. לשחקן 2 יש אסטרטגיה מנצחת
 3. לשני השחקנים יש אסטרטגיית תיקו
- (השלכה בשחמט: או שהלבן יכול לנצח תמיד, או שהשחור יכול לנצח תמיד או ששני השחקנים יכולים להבטיח שיכפו תיקו. לא יודעים מה מהני"ל נכון).

הוכחה: כיוון שהמשחק סופי קיים ש"מ נאש (לדוגמא- ש"מ נאש אשר מושג ע"י אינדוקציה לאחור). נסמן ש"מ זה ב (s_1^*, s_2^*) . כעת יתכנו 3 אפשרויות:

1. $u_1(s_1^*, s_2^*) = 1$ $u_2(s_1^*, s_2^*) = -1$
2. $u_1(s_1^*, s_2^*) = -1$ $u_2(s_1^*, s_2^*) = 1$
3. $u_1(s_1^*, s_2^*) = u_2(s_1^*, s_2^*) = 0$

נתייחס לכל אחת מהאפשרויות בנפרד:

1. מכיוון ש $s_2^* \in BR_2(s_1^*)$, לכל אסטרטגיה של שחקן 2: $u_2(s_1^*, s_2^*) \leq u_2(s_1^*, s_2^*) = -1$ ואז לכל s_2 מתקיים $u_1(s_1^*, s_2) = 1$ $u_2(s_1^*, s_2) = -1$, כלומר s_1^* מנצחת.
2. כנ"ל, s_2^* מנצחת.
3. מכיוון ש $s_1^* \in BR_1(s_2^*)$ מתקיים $u_1(s_1^*, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) = 0$ ומכאן ש $u_2(s_1^*, s_2^*) \geq 0$ לכל s_1 , וכן ידוע ש $u_2(s_1^*, s_2^*) = 0$, מכאן s_2^* הינה אסטרטגיית תיקו ל-2, באופן דומה s_1^* אסטרטגיית תיקו ל-1. אסטרטגיית תיקו זו לא בהכרח כזו המשיגה אפס. (היא תשיג לפחות אפס ומקסימום 1).

מודלים כלכליים המתוארים בצורת עץ

דוגמא-ניזכר במודל קורנו: ישנן מס' מתחרות בשוק. כל אחת מייצרת כמות מסוימת. המידע מגיע למתחרות דרך מרגלים ואף אחת לא מודעת לקיום מרגל בתוכה. מודל סקטלברג- זהה לקורנו, פרט לכך שקיימת פירמה אחת מובילה שיוודעת שיש ריגול בתוכה ובכך יודעת שמגיבים לה (ויוודעת איך מגיבים לה). נניח את הנתונים הבאים ושהשוק בנוי במבנה של מודל סקטלברג כשפירמה 1 מודעת לריגול בתוכה:

$$TC_1(q_1) = 20q_1$$

$$TC_2(q_2) = 20q_2$$

$$D: Q = 120 - P \rightarrow P = 120 - Q$$

נמצא את BR_1, BR_2

$$\pi_1(q_1, q_2) = (120 - (q_1 + q_2)) * q_1 - 20q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 120 - 2q_1 - 20 - q_2 = 0$$

$$BR_1 : q_1^* = 50 - \frac{q_2}{2}$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = (120 - (q_1 + q_2)) * q_2 - 40q_2$$

$$\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 120 - 2q_2 - 40 - q_1 = 0$$

$$BR_2 : q_2^* = 40 - \frac{q_1}{2}$$

כשפירמה 1 מובילה, נציב את q_2^* לתוך $\pi_1(q_1, q_2)$:

$$\pi_1(q_1, q_2) = \left(120 - \left(q_1 + 40 - \frac{q_1}{2}\right)\right) * q_1 - 20q_1 = \left(80 - \frac{q_1}{2}\right) * q_1 - 20q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 60 - q_1 = 0 \rightarrow q_1 = 60$$

לקבלת q_2 נציב את $q_1 = 60$ בתוך $BR_2 : q_2^* = 40 - \frac{q_1}{2}$ ונקבל $q_2 = 10$.

זהו ש"מ SGP, (ש"מ זה הוא תמיד גם ש"מ נאש). האסטרטגיה לשחקן 2 היא בצומת שמגיע לאחר q_1 .

האסטרטגיה: "כאשר $q_1 \leq 80$ בחר $q_2 = 40 - \frac{q_1}{2}$ ולאחר $q_1 > 80$ בחר $q_2 = 0$ ". נשים לב כי יש אינסוף

אסטרטגיות עבור שחקן 2. לעומת זאת לשחקן 1 ישנה אסטרטגיה יחידה. כלומר לשחקן בעל האסטרטגיה המנהיגה יש רק אסטרטגיה אחת. הבעיה שנוסחה לעיל דואגת למצוא את הדבר הכי טוב ששחקן 1 יכול לעשות לעצמו. שחקן 1 מסתכל על מבנה מצומצם יותר. נסתכל על כל אפשרויות הבחירה שלו:

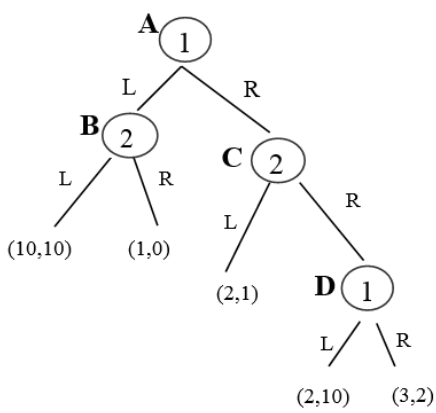
- $q_2 = 10$ אחרי $q_1 = 60$ ו- $q_2 = 200$ בכל מקום אחר. 2 גורם ל-1 לעשות מה שהוא רוצה שיעשה, כלומר ל-2 יש כוח מאוד גדול במשחק הזה. ש"מ נאש.

- $q_2 = 37$ אחרי $q_1 = 6$. $q_2 = 800$ בכל מקום אחר. ש"מ נאש.

דוגמא עבור מקרה שהוא לא ש"מ נאש: $q_2 = 10$ לאחר $q_1 = 60$ ו- $q_2 = 0$ בכל מקום אחר. $(50, 0)$ זה המקום הכי טוב שאפשר להגיע במשחק הזה ולכן לא ש"מ נאש.

תרגיל כיתה מס' 5- שאלה 1

נתון העץ הבא:



1. רשום את האסטרטגיות של כל שחקן.
2. רשום את המשחק החד-שלבי המתאים (בצורת מטריצה).
3. מצא את כל שווי המשקל במשחק.
4. מי משווי המשקל שמצאת הינו חסין לטעויות הרצה (ש"מ SGP)?

פתרון:

4 : 1+2 אסטרטגיות לשחקן 1 ו-4 אסטרטגיות לשחקן 2, רשומות במטריצה:

	L,L	L,R	R,L	R,R
L,L	10,10	10,10	1,0	1,0
L,R	10,10	10,10	1,0	1,0
R,L	2,1	2,10	2,1	2,10
R,R	2,1	3,2	2,1	3,2

3. ש"מ במשחק: $(L,L),(L,L) (L,L),(L,R) (L,R),(L,L) (L,R),(L,R) (R,R),(R,R)$
4. למציאת SGP עדיף להתבונן בעץ ולא במטריצה. מקבלים $(L,R),(L,R)=(10,10)$. ש"מ SGP.

תרגיל כיתה מס' 5- שאלה 2

שלוש חברות מייצרות מוצר רציף. אין להן עלויות ייצור. מחיר השוק כפונקציה של הכמות המוצעת: $P(Q)=100-Q$. חברה א' בוחרת תחילה כמה לייצר. אח"כ בוחרת חברה ב', ואח"כ בוחרת חברה ג'. כמה תייצר כל חברה, ומה יהיה הרווח שלה?

פתרון: ישנן אינסוף אסטרטגיות החלטה לכל חברה. אינסוף קודקודי החלטה של ב' ו-ג'. הפתרון מתחיל מחברה ג', נמצא מה כדאי לה לעשות ובעקבות זאת מה כדאי לחברה ב' לעשות ולבסוף מה כדאי לחברה א' לעשות.

נבדוק מה כדאי לחברה ג' לעשות כשהיא בצומת לאחר שחברות ב' ו-א' ייצרו q_1, q_2 .

$$\pi_3(q_1, q_2, q_3) = (100 - (q_1 + q_2 + q_3)) * q_3$$

$$\frac{\partial \pi_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} = 100 - q_1 - q_2 - 2q_3 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow q_3 = \frac{100 - q_1 - q_2}{2}$$

נבדוק מה כדאי לחברה ב' לעשות כשהיא בוחרת לאחר חברה א' בהינתן שחברה ג' נוהגת בצורה אופטימלית בהתאם ל q_1 הנידון ו- q_2 הנבחר.

$$\pi_2(q_1, q_2, q_3) = (100 - (q_1 + q_2 + q_3)) * q_2 = \left(100 - \left(q_1 + q_2 + \frac{100 - q_1 - q_2}{2} \right) \right) * q_2 = \left(50 - \left(\frac{q_1 + q_2}{2} \right) \right) * q_2$$

$$\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} = 50 - \frac{q_1}{2} - q_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$q_2 = \frac{100 - q_1}{2}$$

נבדוק מה כדאי לחברה א' לעשות בהינתן שחברה א' פועלת אופטימלית בהינתן מה שחברה א' ו-ב' יעשו ו- ב' נוהגת בצורה אופטימלית בהתאם לבחירת ג' :

$$\pi_1(q_1, q_2, q_3) = \pi_1(q_1) = (100 - (q_1 + q_2 + q_3)) * q_1 = \left(100 - \left(q_1 + \frac{100 - q_1}{2} + \frac{100 - q_1 - \frac{100 - q_1}{2}}{2} \right) \right) * q_1 =$$

$$\left(100 - \left(q_1 + \frac{100 - q_1}{2} + \frac{50 - \frac{q_1}{2}}{2} \right) \right) * q_1 = \left(100 - \left(q_1 + 50 - \frac{q_1}{2} + 25 - \frac{q_1}{4} \right) \right) * q_1 = \left(100 - \left(75 + \frac{q_1}{4} \right) \right) * q_1 =$$

$$\left(25 - \frac{q_1}{4} \right) * q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} = 25 - \frac{q_1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$q_1 = 50$$

קעת נוכל לחשב את הכמויות עבור חברה ב' ו-ג' ואת הרווחים המתקבלים לכל חברה:

$$q_1 = 50 \rightarrow \pi_1 = 625$$

$$q_2 = 25 \rightarrow \pi_2 = 312.5$$

$$q_3 = 12.5 \rightarrow \pi_3 = 156.25$$

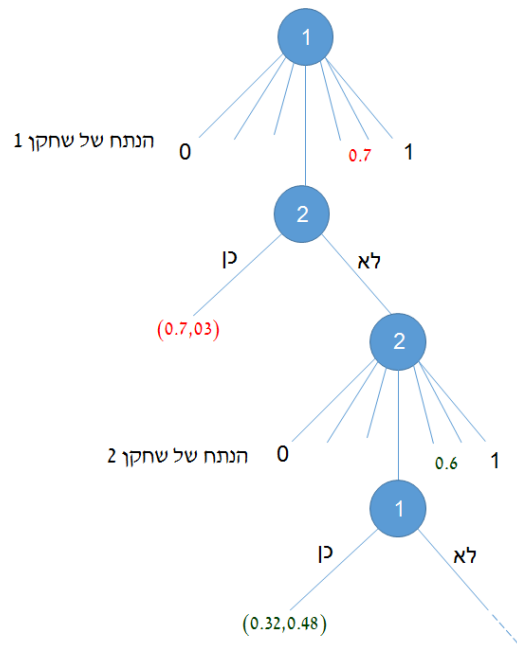
מודל המיקוח של רובינשטיין

2 שחקנים צריכים לחלק עוגה ביניהם. בשלב הראשון שחקן 1 נותן הצעת חלוקה ושחקן 2 יכול להסכים או לסרב. אם יסכים - יסתיים המשחק, כל שחקן יקבל את חלקו בהתאם להצעה. אם יסרב עוברים לשלב השני. המחיר יהיה שהעוגה תקטן באופן הבא: גודל העוגה יוכפל ב- α ביחס לגודלה בשלב הקודם, $0 < \alpha < 1$. בשלב ב- j : אם j זוגי - שחקן 2 נותן הצעה. שחקן 1 מסכים/ מסרב. אם j אי-זוגי - שחקן 1 נותן הצעה. שחקן 2 מסכים/ מסרב.

התשלומים : במידה והושגה הסכמה בשלב ה-j, תחולק עוגה בגודל α^{j-1} ע"פ ההצעה שהתקבלה. במידה ולא התקבלה הסכמה- כל שחקן לא יקבל דבר. נשים לב ששחקן 1 יעדיף α קטן (שכן כך הוא מעניש יותר את שחקן 2).

דוגמא :

נניח $\alpha = 0.8$. נתאר את המשחק באופן הבא : נשים לב שכאן אין תחתית לענף ולכן יש בעיה בקביעת ש"מ פרפקטי, שכן לא ניתן לבצע כאן Backward Ind. . אסטרטגיה צריכה להגיד מה השחקן עושה בכל אחד מצמתי ההחלטה שלו. אם היינו רוצים לייצג את ההחלטות היינו צריכים וקטור אינסופי, שכן ישנם אינסוף צמתים בכל שלב. לכן הבנייה תיעשה בצורה שונה.



דרך התיאור של אסטרטגיה עבור שחקן נוסף-

כל צומת החלטה מזוהה באופן חד-חד ערכי עם היסטוריה מסוימת של סדרת פעולות. המשמעות- אם נרצה להראות מה השחקן בוחר בכל צומת ניתן להמיר זאת במה שיעשה בעקבות כל היסטוריה.

אסטרטגיה לשחקן 1- הצע בכל שלב בו אתה אמור להציע, 0.9 לעצמך. (כאן קבענו מה יקרה בכל שלב לאורך כל ההיסטוריה מבחינת החלטת החלוקה). הסכם לכל הצעה שתיתן לך לפחות 0.4.

אסטרטגיה לשחקן 2- הצע בכל שלב בוא אתה אמור להציע 0.6 לעצמך והסכם לכל הצעה שתיתן לך לפחות 0.1

במצב זה התשלומים הם : $(0.9, 0.1)$.

אם שחקן 2 יסטה לאסטרטגיה אחרת בה יסרב להצעות שונותות לו 0.1 ויציב בשלב השני 0.6 לעצמו הוא ישיג יותר כנגד אותה אסטרטגיה של שחקן 1 : $(0.32, 0.48) = (0.8 * 0.4, 0.8 * 0.6)$. במצב זה, שחקן 2

בעצם שיפר את התשלומים מ-0.1 ל-0.48 ע"י סטייה לאסטרטגיה אחרת.

עולה השאלה הבאה : האם קיים ש"מ שבו שחקן 1 יקבל 0.9 ?

כן, התיאור זהה לזוג האסטרטגיות לעיל פרט לכך ששחקן 1 יסכים רק להצעות שיתנו לו לפחות $7/8$. במצב כזה שחקן 2 יודע שאם יסרב בשלב הראשון, יוכל לקבל בשלב השני תשלום שיהיה 0.1 לכל היותר. $(0.8 * 1/8 = 0.1)$.

כל דבר שנעמיד כמטרה לבדיקה עבור ש"מ נאש נמצא אותו בסוף כש"מ נאש (עבור החלטות מסוימות), כאן מעניין ש"מ פרפקטי, נראה שיש רק ש"מ פרפקטי אחד.

משפט רבינשטיין- קיים S.G.P יחיד. אסטרטגיות השחקנים יהיו :

בכל שלב בצע $\frac{1}{1+\alpha}$ לעצמך ו- $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ ליריב והסכם לקבל בכל שלב לפחות $\frac{\alpha}{1+\alpha}$.

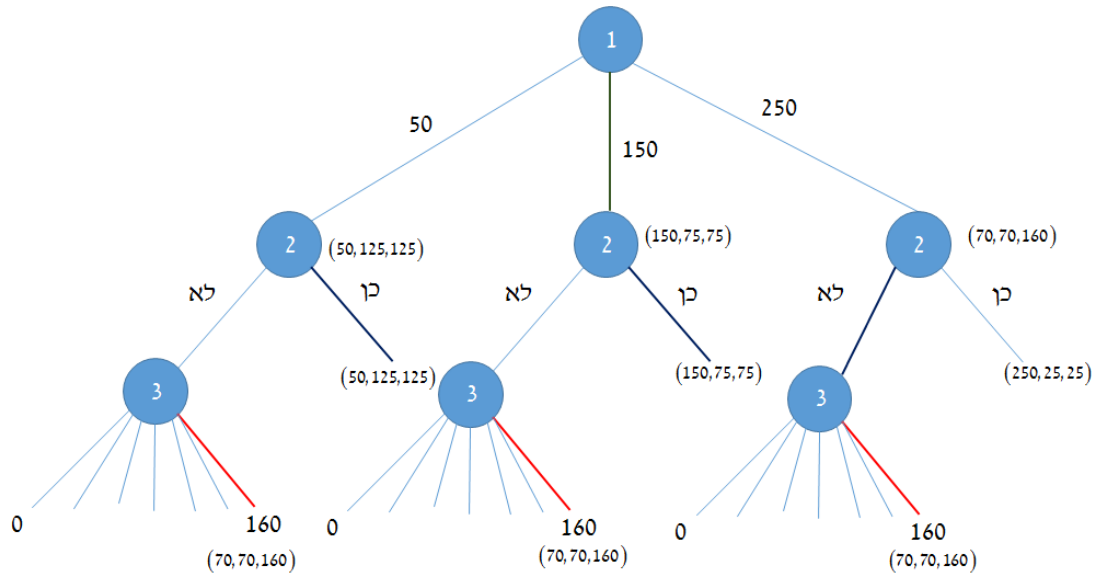
ניתן לראות שכאשר $\alpha = 1$ אין הבדל בין השלב הראשון לשלב השלישי $(0.5, 0.5)$. נניח $\alpha = 2/3$ אזי בשלב

הראשון : $(3/5, 2/5)$, בשלב השני הכוח יהיה בידי שחקן 2 ואז הוא כבר עם עוגה בגודל $2/3$ ומכאן שבשלב הבא יקבלו אותו דבר.

שאלה 4 מתוך מבחן 5.8.13

שלושה אחים (שחקן 1, שחקן 2 ושחקן 3) צריכים לחלק ביניהם ירושה של 300 אלף ₪. שחקן 1 בוחר בשלב ראשון אחת מ-3 אפשרויות: לקבל 50, 150 או 250 אלף ₪. שחקן 2 יכול להסכים להצעה ואז עליו להתחלק ביתרת הירושה באופן שווה עם שחקן 3. לחילופין יכול שחקן 2 לדחות את ההצעה. במקרה כזה ניתנת הבחירה לשחקן 3 לקחת לעצמו כל סכום עד 160 אלף ₪ וכל היתרה תתחלק באופן שווה בין שחקן 1 ושחקן 3.

ראשית נצייר עץ:



4.1

- במשחק זה יש שיווי משקל תת-משחק פרפקטי יחיד.
 - קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי בו שחקן 1 מקבל בפועל 150 אלף ש"ח.
 - קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי בו שחקן 2 מקבל בפועל 125 אלף ש"ח.
 - אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.
- שחקן 3 יבחר 160, ש"מ פרפקטי, כלומר התשלומים האופטימליים ב-S.G.F הינם: (70, 70, 160). נראה מה קורה כאשר שחקן 2 אומר לא: ((150), (Yes, Yes, No), (160, 160, 160)). אין אדישות בשום מקום בעץ ולכן S.G.F.

4.2

- במשחק זה יש שיווי משקל נאש יחיד.
 - קיים שיווי משקל נאש בו שחקן 1 מקבל בפועל 150 אלף ש"ח.
 - קיים שיווי משקל נאש בו שחקן 2 מקבל בפועל 125 אלף ש"ח.
 - אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.
- ש"מ נאש במשחק הוא למשל ((150), (Yes, Yes, No), (159, 160, 160)), גם כל השאר בתחום הבחירה יהיו ש"מ נאש.

4.3

- האסטרטגיה של שחקן 1 "לבחור לעצמו 150 אלף ₪" שולטת חלש על האסטרטגיה של שחקן 1 "לבחור לעצמו 50 אלף ₪".
- האסטרטגיה של שחקן 2 "להסכים לבחירה של 50 אלף ₪ לשחקן 1 ולסרב לכל בחירה אחרת של שחקן 1" שולטת חלש על האסטרטגיה של שחקן 2 "להסכים לכל בחירה של שחקן 1".
- האסטרטגיה של שחקן 3 "להציע תמיד לעצמו 160 אלף ₪" שולטת חלש על האסטרטגיה של שחקן 3 "להציע תמיד לעצמו 150 אלף ₪".
- אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א' לא נכון : בחירה של שחקן 1 ב-150 יכולה להוביל אותו במקרה הכי גרוע לקבל 70. מצד שני אם יבחר ב-50 יוכל לקבל יותר מ-70 וזה קורה כאשר שחקן 2 בוחר "לא" בענף השמאלי ביותר ושחקן 3 בוחר בפחות מ-160.

ב' לא נכון $((150), (\phi, 160, \phi))$. עבור שחקן 2, לא-70, כן-75.

ג' נכון : ראשית יש מקום בו הם שקולים ולכן זו בהכרח לא שליטה חזקה. אם שחקן 3 בוחר $(150, 150, 150)$ זה מוביל ל: $((50), (Yes, Yes, No), (160, 160, 160))$ ואם שחקן 3 בוחר $(150, 150, 150)$ זה מוביל ל- $((50), (Yes, Yes, No), (150, 150, 150))$. ישנה שקילות עבור בחירת שחקן 1 ב-150.

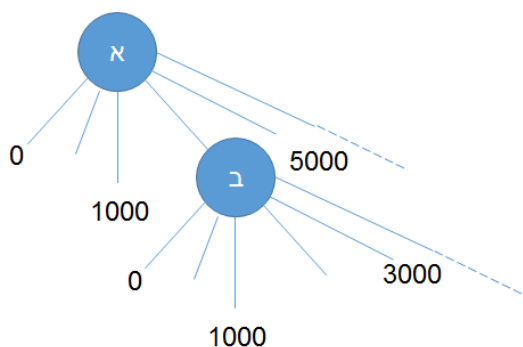
שאלה 3 מתוך מבחן 4.4.13

בבניין דו משפחתי שני הדיירים בסכסוך מתמשך. ברצונם לבנות קיר הפרדה. כל דייר רואה תועלת כספית בהקמת הקיר. לדייר א' תהיה תועלת כספית בשווי 5500 ש' ולדייר ב' תועלת כספית בשווי 3500 ש' כתוצאה מהקמת הקיר. כל דייר יכול לתרום להקמת הקיר באלפים שלמים של ש'. הנח כי דייר א' תורם ראשון, ואחריו דייר ב' מחליט על תרומתו. הקיר יוקם רק אם סכום התרומות יכסה את עלותו, ובכל מקרה שסך התרומות לא מספיק, התרומות לא יוחזרו.

הערה : בכל מקרה שהסכום שנאסף גבוה מעלות הקיר, העודפים יחולקו בין הדיירים שווה בשווה.

ראשית נצייר עץ :

דייר ב' צריך לגרום לדייר א' לא להתחרט



3.1. במשחק בו עלות הקיר 6000 ש'

- א. קיים שיווי משקל נאש בו דייר א' יתרום 2000 ש'.
- ב. קיים שיווי משקל נאש בו דייר ב' יתרום 1000 ש'.
- ג. קיים שיווי משקל נאש בו דייר א' יתרום 6000 ש'.
- ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

לא קיים שיווי משקל בו דייר א' תורם 2000, כי זו תהיה החלטה טובה רק במידה ו-א' ידע כי ב' תורם 4000 אחריו, אבל זה לא יקרה, כי השווי ל-ב' הוא רק 3500. קיים שיווי משקל בו ב' תורם 1000, למשל, אם שחקן ב' לא יתרום בכל מצב בו תרומת א' נמוכה מ-5000, ויתרום 1000 במקרים האחרים. במקרה כזה יבחר א' לתרום 5000 ו-ב' יתרום 1000. לא קיים שיווי משקל בו דייר א' תורם 6000, כי במידה וזה יקרה, יבחר ב' לא לתרום, כך ש-א' ישלם יותר מערך הקיר עבורו.

3.2. במשחק בו עלות הקיר 6000 ש'

- א. קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי בו דייר א' יתרום 2000 ש'.
- ב. קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי בו דייר ב' יתרום 1000 ש'.
- ג. קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי בו דייר א' יתרום 6000 ש'.
- ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

עבור דייר ב' : בצמתים בהם דייר א' תורם פחות מ-3000 הוא בוחר 0. בצמתים בהם א' תורם 3000 ומעלה הוא ישלם ל-6000. (הסבר : בשיווי משקל תת-משחק פרפקטי בכל מצב בו נשאר לדייר ב' להשלים 3000 ש' ומטה – הוא יעשה זאת, לכן קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי יחיד בו דייר א' יתרום 3000 ואחריו דייר ב' יתרום 3000.

הנח החל מעתה כי האגודה לתרבות הדיור תממן מחצית מעלות הקיר בתנאי שתרומת דייר ב' תהיה בפועל לא פחותה מתרומת דייר א' (אחרת לא תממן כלל).

הערות:

- כשדייר א' תורם, הוא לא יכול לדעת אם האגודה לתרבות הדיור תממן מחצית מהקיר (כי אינו יודע את תרומת דייר ב').
- דייר ב' ידע בעקבות תרומת דייר א' את ההשלכה של תרומתו הוא על תרומת האגודה לתרבות הדיור.
- אין צורך להכניס את האגודה לתרבות הדיור כשחקן במשחק.

3.3. במשחק בו עלות הקיר 6000 ₪

- קיים שיווי משקל נאש בו דייר א' יתרום 2000 ₪.
 - קיים שיווי משקל נאש בו דייר ב' יתרום 1000 ₪.
 - קיים שיווי משקל נאש בו דייר א' יתרום 6000 ₪.
 - אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.
- קיים שיווי משקל בו א' תורם 2000, למשל, אם שחקן ב' ישתמש באסטרטגיה הבאה:
- אם א' תורם 1000 – לא לתרום.
אם א' תורם 2000 – לתרום 2000.
אם א' תורם 3000 ומעלה – לא לתרום.
במצב זה ל-א' כדאי לתרום 2000 ואז האגודה תשתתף ב-3000 (וכל דייר יקבל החזר של 500).
קיים שיווי משקל בו א' תורם 5000, למשל, אם שחקן ב' ישתמש באסטרטגיה הבאה:
אם א' תורם פחות מ-5000 – לא לתרום.
אם א' תורם 5000 ומעלה – לתרום 1000.
במצב זה ל-א' כדאי לתרום 5000, ב' יתרום 1000 ואז האגודה לא תשתתף.
לא קיים שיווי משקל בו דייר א' תורם 6000, כי במידה וזה יקרה, יבחר ב' לא לתרום (ואז האגודה לא תשתתף), כך ש-א' ישלם יותר מערך הקיר עבורו.

3.4. במשחק בו עלות הקיר 6000 ₪

- קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי בו דייר א' יתרום 2000 ₪.
 - קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי בו דייר ב' יתרום 1000 ₪.
 - קיים שיווי משקל תת-משחק פרפקטי בו דייר א' יתרום 6000 ₪.
 - אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.
- הסבר:
- אם א' לא יתרום, ב' יתרום 3000 והאגודה תשלם 3000.
אם א' יתרום 1000, ב' יתרום 2000 והאגודה תשלם 3000.
אם א' יתרום 2000, ב' יתרום 2000 והאגודה תשלם 3000 כך שכל אחד יקבל החזר 500.
אם א' יתרום 3000, ב' יתרום 3000 והאגודה תשלם 3000 כך שכל אחד יקבל החזר 1500.
אם א' יתרום 4000, ב' יתרום 4000 והאגודה תשלם 3000 כך שכל אחד יקבל החזר 2500.
אם א' יתרום 5000, ב' יתרום 5000 והאגודה תשלם 3000 כך שכל אחד יקבל החזר 3500.
אם א' יתרום 6000, ב' לא יתרום.
לכן, בשיווי משקל תת-משחק פרפקטי א' יעדיף לא לתרום כלל. זהו משחק מיקוח, מהווה את הצד של השני של התמונה.

שאלה 4 מתוך מבחן 11.11.14

במודל המיקוח של רובינשטיין שחקן 1 מציע הצעה $0 \leq x \leq 1$, שחקן 2 יכול להסכים להצעה ואז התשלומים הם $(x, 1-x)$ או לחילופין לדחות את ההצעה ולהציע מנגד הצעה חדשה $0 \leq y \leq 1$. שחקן 1 יכול להסכים לחלוקה המוצעת על ידי שחקן 2 ואז התשלומים הם $(1-y, y)$ או לדחות את ההצעה ולתת הצעה שלו לשחקן 2. המשחק ממשיך בדרך זו עד ששחקן מסכים להצעת חברו, אם אין הסכמה לנצח אז התשלומים הם $(0,0)$. הנח כי מקדם

$$\lambda = 0.6.$$

נתבונן באסטרטגיות הבאות:

T- השחקן מציע בתורו תמיד 0.4 לעצמו ומוכן לקבל כל הצעה שנותנת לו לפחות 0.25.

W- בפעם הראשונה שהשחקן מציע הוא מציע 0.6 לעצמו, בכל שלב אחר הוא מציע 0.75 לעצמו, הוא מוכן לקבל כל הצעה שנותנת לו לפחות 0.6.

R- בפעם הראשונה שהשחקן מציע הוא מציע 0.4 לעצמו, בכל שלב אחר הוא מציע 0.3 לעצמו. השחקן מוכן לקבל כל הצעה שנותנת לו לפחות 0.4.

4.1

א. $W \in BR_2(T)$

ב. $W \in BR_1(W)$

ג. $R \in BR_2(W)$

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

נבדוק את א': שחקן 1 מציע 0.4 לעצמו ו-0.6 ליריב (לשחקן 2) T-. היריב מוכן לקבל את ההצעה שנותנת לפחות 0.6 W, כלומר זהו (0.4, 0.6) הפקטור הינו $\lambda = 0.6$ ולכן שחקן 2 לא יכול לסטות ולשפר, הוא יקבל בטוח פחות אם יסרב כי העוגה תהיה בגודל של 0.6 מגודלה הראשוני. א' נכון
נבדוק את ב': זו לא ה- BR של 1 כיוון ש-1 יכול לסטות ולשפר.
נבדוק את ג': שחקן 1 מציע 0.6 לעצמו ו-0.4 ליריב. השחקן השני מקבל לפי W והתשלומים (0.6, 0.4).
שחקן 2 לא יכול להשיג יותר מ-0.4 כי אם יגרור לשלב השני גודל העוגה יהיה 0.6 ומתוך זה שחקן 1 לא יסתפק בפחות מ-60%, זה ישאיר לשחקן 2 40% מ-0.6 שזה 0.24 לכל היותר וזה רק ילך ויחמיר. ג' נכון.

4.2

א. זוג האסטרטגיות (T, W) הן שיווי משקל נאש.

ב. זוג האסטרטגיות (W, R) הן שיווי משקל נאש.

ג. זוג האסטרטגיות (R, W) הן שיווי משקל נאש.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

נבדוק את א': בדקנו $W \in BR_2(T)$, נותר לבדוק: $T \in BR_1(W)$. שחקן 1 יקבל 0.4 וכנגד W לא יוכל להשיג יותר כי שחקן 2 לא יהיה מוכן להצעות שיתנו לו פחות מ-0.6 וזה ישאיר לשחקן 1 0.4.
נבדוק את ב': התשלומים (0.6, 0.4), רק בשלב הרביעי נגיע לכך ששחקן 2 יבחר 0.3 באסטרטגיה R, אבל עד אז העוגה תקטן ממש ולא נשיג יותר מ-0.6
נבדוק את ג': התשלומים (0.4, 0.6), כמו בסעיף ב', T כנגד W השיג 0.4 ואי אפשר יותר טוב. בכיוון השני האם W אופטימלי ל R? כדי לקבל יותר מ-0.6 צריך לחכות, אבל בינתיים העוגה קטנה מדי. נסכם: תשובות א' עד ג' מהוות ש"מ נאש והן נכונות -> ד' תשובה נכונה.

4.3

א. זוג האסטרטגיות (T, T) הן שיווי משקל נאש.

ב. זוג האסטרטגיות (R, R) הן שיווי משקל נאש.

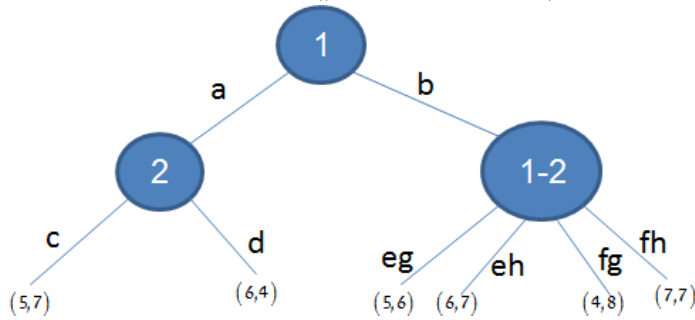
ג. זוג האסטרטגיות (W, W) הן שיווי משקל תת-משחק פרפקטי.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

ש"מ פרפקטי יש יחיד: כל שחקן יציע לעצמו $\frac{1}{1+0.6}$ וליריב: $\frac{0.6}{1+0.6}$ ואף אסטרטגיה לא עושה זאת. (ג' נפסל)
נבדוק האם (T, T) ש"מ: שחקן 1 יציע לעצמו 0.4 ו-2 יסכים: תשלומים (0.4, 0.6). כיוון ששחקן 2 יסתפק ב-0.25 שחקן 1 יכול להציע לעצמו 0.75 והמשחק יסתיים עם התשלומים (0.75, 0.25). נבדוק האם $T \in BR_2(T)$
: כרגע שחקן 2 מקבל 0.6 הוא לא יכול לשפר כי אם יסרב יוכל בצורה דומה להציע ליריב 0.25 ולעצמו 0.75 ואז המשחק יסתיים, אבל מאחר והעוגה קטנה התשלום פחות מ-0.6. (א' נפסל).
נבדוק האם (R, R) ש"מ: שחקן 1 יציע לעצמו 0.4 ושחקן 2 יסכים: תשלומים (0.4, 0.6). וגם כאן שחקן 1 יוכל לשפר את מצבו אם יציע לעצמו 0.6 ול-2 ו-0.4 ועדיין 2 יסכים התשלומים יהיו (0.6, 0.4). (ב' נפסל)
תשובה נכונה תהיה ד'.

משחקים חוזרים ומשחקים דינמיים לא פשוטים

השוני: קיימים קודקודי החלטה שבהם מספר שחקנים אמורים לקבל החלטה (ולא שחקן 1 נסתכל על תת-משחק בעץ שמשמאל:



	g	h
e	5,6	6,7
f	4,8	7,7

האם זוג האסטרטגיות $(a,e), (c,g)$ ש"מ נאש? כן.

התשלומים הם 5,7. נראה זאת באופן מפורש:

$$(c,g) \in BR_2((a,e)) = \{(c,g), (c,h)\}$$

$$(a,e) \in BR_1((c,g)) = \{(a,e), (b,e), (a,f)\}$$

גם $(c,g), (a,f)$ ש"מ נאש. היחיד שיכול להטות את המשחק הוא שחקן 1 אבל ראינו ש (a,f) תגובה

אופטימלית ולכן לא יסטה.

איך מוצאים ש"מ SGP – ש"מ בהשריה של אסטרטגיות בכל תת משחק עדיין מהווה ש"מ. נאמר שבמשחק הנ"ל אין ש"מ S.G.P. כיוון שבתחתית המשחק המתחיל בקודקוד הימני התחתון אין זוג אסטרטגיות של ש"מ.

משחקים חוזרים – הרעיון בא מתחומים של מדעי ההתנהגות. מונע בעיקר מדילמת האסיר.

הגדרה – יהי G משחק סטטי (בצורת טבלה), במשחק החוזר k פעמים השחקנים יחזרו על G, k פעמים והתשלומים יכולים להיקבע במספר דרכים: 1. כסכום התשלומים שהשחקנים השיגו בתשלומים שבוצעו.

2. ממוצע שהשחקנים השיגו במשחקים שביצעו. במשחק החוזר ∞ פעמים התשלומים יהיו שקלול

גיאומטרי של התשלומים במשחקים השונים. ניקח מקדם היוון discount factor $\delta < 1$ כך שהתשלום המתקבל כשהשחקן משיג סדרת תשלומים מסוימת $u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \dots$ יהיה $(1-\delta)(u_{i1} + \delta u_{i2} + \delta^2 u_{i3} + \dots)$

כאשר $(1-\delta)$ הינו פקטור נרמול עבור קבלת ממוצע משוקלל הכי טוב (אם כל האיברים שווים אזי

$$(1-\delta)u_{ii}(1+\delta+\delta^2+\dots) = (1-\delta)u_{ii} \frac{1}{(1-\delta)}$$

תיאור משחק חוזר באמצעות עץ –

חלק ממערך האסטרטגיה הוא מה היו עושים בכל סיטואציה בהתאם להיסטוריה של מה שקרה במשחק הקודם. למעשה מדובר בתיאור משחק מורכב ביותר ולכן דרך הניתוח לא תגיע מתיאור ויזואלי של עץ. אסטרטגיה לשחקן תספר מה הוא יעשה בכל שלב לאחר כל היסטוריה משחקים.

דוגמא: נתון המשחק החד שלבי הבא:

	C	D
A	7,7	2,4
B	4,2	5,5

נחקור את המשחק הנ"ל החוזר ∞ פעמים, כאשר $\delta = 0.5$.

תהא S אסטרטגיה לשחקן 1: שחקן B כל עוד השחקן שמנגד שיחק בכל היסטוריה D, בכל מקרה אחר שחקן A. בשלב הראשון שחקן B.

תהא T אסטרטגיה לשחקן 2: שחקן D בשלב הראשון ובכל שלב שלאורך ההיסטוריה שלפניו שחקן 1 שיחק B, אחרת שחקן C.

נבדוק האם (S,T) ש"מ נאש?

נתבונן במהלך המשחק ובתשלומים:

1: BBB....

2: DDD....

Payments:

1: 555....

2: 555...

שחקן 1 יוצר טריגר (ובאותו זמן מרעה לעצמו). הולכים ל- (2,4) אבל אז הולכים ל- (7,7), התשלומים

Payments:

1: 555277..

2: 555555..

במשחק האינסופי הם:

עלינו לבדוק את ה- δ (מקדם ההיוון)

$$5 + 5\delta + 2\delta^2 + 7\delta^3 + \dots \geq 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + 5\delta^4 + \dots$$

$$2 + 7\delta + 7\delta^2 + \dots \geq 5 + 5\delta + 5\delta^2 + \dots$$

$$(2 + 7\delta + 7\delta^2 + \dots)(1-\delta) \geq \underbrace{(5 + 5\delta + 5\delta^2 + \dots)}_5 (1-\delta)$$

$$\left(2 + 7\delta \frac{1}{1-\delta}\right)(1-\delta) \geq 5$$

$$2 - 2\delta + 7\delta \geq 5 \rightarrow \delta \geq 0.6$$

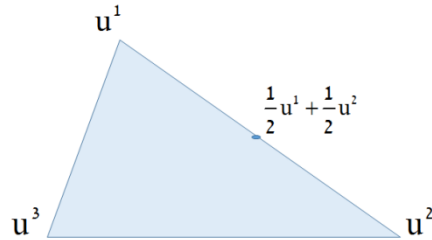
קיבלנו שמקדם ההיוון גדול מ-0.5, כלומר כאשר $\delta \geq 0.6$ כדאי לסטות. לכן (S,T) ש"מ נאש.

משפט קיום לוקטור תשלום במשחק

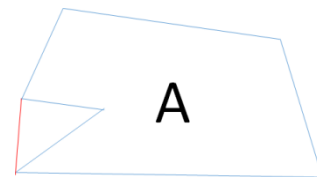
נגדיר קבוצה F שבה כל הצירופים הקמורים של התשלומים במשחק החד שלבי. צירוף קמור של וקטורים הוא צירוף לינארי של הוקטורים שבו סך המשקולות הוא 1 וכל המשקולות אי-שליליים. (F =Feasible Set)

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 \end{matrix}$$

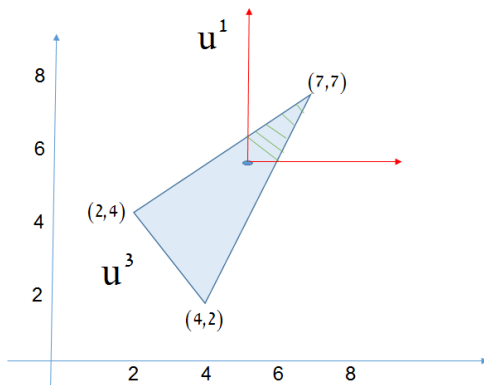
מבחינה גיאומטרית:



קמור של קבוצה A - הקבוצה הקמורה הקטנה ביותר שמכילה את A , למשל:



כאן צריך להוסיף את הקו האדום כדי לקבל את הקמור. עבור הדוגמא:



משפט - לכל זוג אסטרטגיות של השחקנים במשחק החוזר האינסופי התשלומים שיקבלו השחקנים שייכים ל- F . מצד שני: לכל נקודה ב- F קיימת $\delta_0 < 1$ כך שלכל $\delta > \delta_0$ קיים זוג אסטרטגיות שהתשלומים לשחקנים בו יהיו ערכי הנקודה.

תכונה - סכום המקדמים בפיתוח $(1-\delta)(u_1 + \delta u_2 + \delta^2 u_1 + \delta^3 u_2 + \delta^4 u_1 \dots)$, כאשר מסדרים את הביטוי כך ש $\sum \alpha = 1, \alpha_i \geq 0$, כלומר: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$ הוא 1.

תשלומים בשיווי משקל

נסמן $R = \text{Rational Set}$ כך שמתקיים: $R = \{(u_1, u_2); u_1 \geq H_1, u_2 \geq H_2\}$

משפט - בכל שיווי משקל, התשלומים יהיו בקבוצה $R \cap F$. לכל נקודה ב- $R \cap F$ קיימת $\delta_0 < 1$ כך שלכל $\delta > \delta_0$ קיים זוג אסטרטגיות ש"מ שהתשלומים בו יהיו ערכי הנקודות. בדוגמא $H_1 = H_2 = 5$ (משחק סימטרי).

שאלה 6 מתוך מבחן 11.11.14

נתון המשחק החוזר האינסופי הבא :

	A	B
A	4,3	2,7
B	5,2	3,4

נתונות האסטרטגיות:

לשחקן 1:

נסמן ב- X_1 את האסטרטגיה הבאה: שחקן A בסיבוב הראשון. בכל סיבוב אחר, אם התשלום שלך (שחקן 1) בסיבוב הקודם גדול ממש מ-3 אז המשך באותה פעולה אחרת החלף פעולה.

נסמן ב- Y_1 את האסטרטגיה הבאה: שחקן ABABAB... כל עוד אין עדות ששחקן 2 סטה מ-ABABAB... אחרת שחקן A לנצח.

לשחקן 2:

נסמן ב- X_2 את האסטרטגיה הבאה: שחקן A בסיבוב הראשון. בכל סיבוב אחר, אם התשלום שלך (שחקן 2) בסיבוב הקודם גדול ממש מ-3 אז המשך באותה פעולה אחרת החלף פעולה.

נסמן ב- Y_2 את האסטרטגיה הבאה: משחקן ABABAB... כל עוד אין עדות ששחקן 1 סטה מ-ABABAB... אחרת שחקן A לנצח.

6.1. עבור גורם היוון של 0.99,

$$X_2 \in BR_2(X_1) \quad \text{א.}$$

$$Y_1 \in BR_1(Y_2) \quad \text{ב.}$$

$$X_2 \in BR_2(Y_1) \quad \text{ג.}$$

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

גורם היוון גבוה, אין כמעט משמעות לזמן: יש אינסוף אסטרטגיות ואינסוף קומבינציות של החלטות. נבדוק את א': נבנה את תזרים התשלומים:

X_1 : A A B A B...

X_2 : A B B B B...

4 2 3 2 3...

3 7 4 7 4...

יכולנו לסטות מהתבנית הזו ולשפר את מצבנו. לכן לא תגובה אופטימלית. נבדוק את ב': נשים לב ששחקן 1 יכול להבטיח לעצמו שאם יסטה מהתבנית הוא יכול לקבל 5 ואז ישחק B לנצח כך שתמיד יהיה 5. שחקן 2 יבחר A לנצח. כלומר זו לא התגובה האופטימלית ולכן ב' לא נכון.

Y_1 : A B A B...

Y_2 : A B A B...

4 3 4 3...

3 4 3 4...

נבדוק את ג': Y_1 ו- X_2 נפגשות מנקודת מבט של 2:

Y_1 : A B A A...

X_2 : A B B B...

4 3 2 2...

3 4 7 7...

גם כאן נשאלת השאלה האם ניתן לקבל זרם תשלומים טוב יותר..

Y_1 : A **A** A A...

X_2 : **B** B B B...

4 2 2 2...

7 7 7 7...

ניתן לראות שעיי סטייה קלה שחקן 2 משיג זרם תשלומים טוב יותר, כלומר הוא הצליח לשפר את עצמו לכן זו לא בחירה אופטימלית. ג' לא תשובה נכונה נסכם: אין תשובה נכונה ולכן ד'.

6.2. עבור גורם היוון של 0.99,

- זוג האסטרטגיות (X_1, X_2) הן שיווי משקל נאש.
- זוג האסטרטגיות (Y_1, Y_2) הן שיווי משקל נאש.
- זוג האסטרטגיות (X_1, Y_2) הן שיווי משקל נאש.

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

א' ו-ב' נפסלות (נימוק ב-6.1) נותר לבדוק את ג' :

זרם התשלומין משמאל :

X_1 : A A B B B...

Y_2 : A B A A A...

4 2 5 5 5...

3 7 2 2 2...

שחקן 2 יכול לקבל את 3 או 7. ברגע ששחקן 2 יבחר B יקבל לכל היותר 7, זרם התשלומים יראה כך :

X_1 : A A B B B...

Y_2 : A B A A A...

4 2 5 5 5...

7 4 7 4 7...

היתרון של 7 על 4 מול החסרון של 3 מול 7 לכל δ ובפרט ל- $\delta = 0.99$, ניתן לסטות ע"מ לשפר ולכן לא ש"מ.

6.3. קיים גורם היוון שעבורו

- קיים זוג אסטרטגיות שיביאו לתשלומים $(4, 4)$.
- קיים זוג אסטרטגיות שיביאו לתשלומים $(3.6, 3.6)$.
- קיים זוג אסטרטגיות שיביאו לתשלומים $(2.5, 2.5)$.

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

משמאל מצויירת קבוצת התשלומים, ניתן לראות שרק $(3.6, 3.6)$ נמצא בתחום.

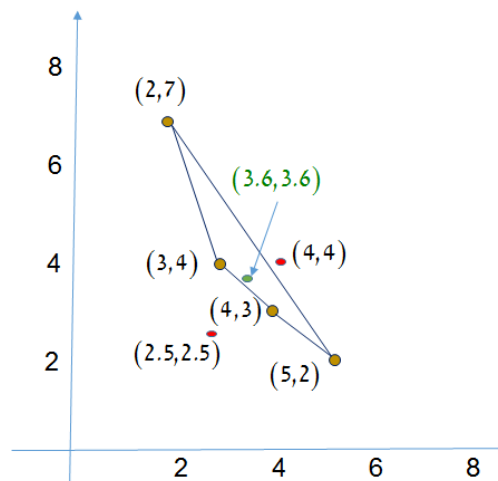
6.4. קיים גורם היוון שעבורו,

- קיים זוג אסטרטגיות שיווי משקל שיביאו לתשלומים $(4, 4)$.
- קיים זוג אסטרטגיות שיווי משקל שיביאו לתשלומים $(3.6, 3.6)$.
- קיים זוג אסטרטגיות שיווי משקל שיביאו לתשלומים $(2.5, 2.5)$.

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

ראשית, היחיד שיכול להיות מועמד הוא זוג האסטרטגיות שיביאו לתשלומים של $(3.6, 3.6)$, כלומר נבדוק

את ב'. נבנה את קבוצת $R : (u_1, u_2) = \begin{cases} u_1 \geq 3 \\ u_2 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 3 \\ H_2 = 4 \end{cases}$, ניתן לראות ש $(3.6, 3.6)$ לא שייך לקבוצה ולכן לא ש"מ. אין תשובה נכונה.



שאלה 6 מתוך מבחן 1.8.14

נתון המשחק החוזר האינסופי הבא :

	A	B
A	3,3	4,2
B	2,4	5,5

נתונות האסטרטגיות:

לשחקן 1:

נסמן ב- X_1 את האסטרטגיה הבאה: שחקן A בסיבוב הראשון. בכל סיבוב אחר, אם התשלום שלך (שחקן 1) בסיבוב הקודם גדול או שווה ל-4 אז המשך באותה פעולה אחרת החלף פעולה.

נסמן ב- Y_1 את האסטרטגיה הבאה: שחקן ABABAB... כל עוד אין עדות ששחקן 2 סטה מ- ABABAB... אחרת שחקן A לנצח.

לשחקן 2:

נסמן ב- X_2 את האסטרטגיה הבאה: שחקן A בסיבוב הראשון. בכל סיבוב אחר, אם התשלום שלך (שחקן 2) בסיבוב הקודם גדול או שווה ל-4 אז המשך באותה פעולה אחרת החלף פעולה.

נסמן ב- Y_2 את האסטרטגיה הבאה: משחקן ABABAB... כל עוד אין עדות ששחקן 1 סטה מ- ABABAB... אחרת שחקן A לנצח.

6.1. עבור גורם היוון של 0.99,

$$X_2 \in BR_2(X_1) \quad \text{א.}$$

$$Y_1 \in BR_1(Y_2) \quad \text{ב.}$$

$$X_2 \in BR_2(Y_1) \quad \text{ג.}$$

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

א': נבנה את זרם התשלומים:

X_1 : A B B B B...

X_2 : A B B B B...

3 5 5 5 5...

5 5 5 5 5...

Y_1 : A B A B A...

Y_2 : A B A B A...

3 5 3 5 3...

3 5 3 5 3...

אין לנו איך לשפר כי 5,5 זה הכי הרבה שנוכל לקבל ולכן זהו B.R. לכן א' נכון.
ב': נבנה את זרם התשלומים:

גם כאן אין איך לשפר עבור שחקן 1 ולכן זהו B.R.

ג': נבנה את זרם התשלומים:

Y_1 : A B A A A A...

X_2 : A B B A B A...

3 5 4 3 4 3 4...

3 5 2 3 2 3 2...

מתסכלים על שחקן 2: סטייה מהתבנית ואז A לנצח: אם היה נוקט ב- Y_2 היה משיג יותר (זרם של 3,5,3,5). עבור אותו זרם הוא לא מגיב בצורה אופטימלית ולכן ירצה לסטות. מכאן שזו לא BR, כלומר ג' לא נכון.

נסכם: א' ו-ב' נכונות, ג' לא נכונה מכאן תשובה ד' נכונה.

6.2. עבור גורם היוון של 0.99,

$$(X_1, X_2) \text{ זוג האסטרטגיות הן שיווי משקל נאש.} \quad \text{א.}$$

$$(Y_1, Y_2) \text{ זוג האסטרטגיות הן שיווי משקל נאש.} \quad \text{ב.}$$

$$(X_1, Y_2) \text{ זוג האסטרטגיות הן שיווי משקל נאש.} \quad \text{ג.}$$

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

ראשית מ-6.1 מצאנו כי תשובת א' ו-ב' נכונות. נבדוק את ג' :

X_1 : A B B A B A B...

Y_2 : A B A A A A A...

3 5 2 3 2 3 2...

3 5 4 3 4 3 4...

3 5 3 5 3 5 3...

קיים זרם תשלומים טוב יותר ולכן זהו לא ש"מ נאש (הזרם באדום)
נסכם : תשובות א' ו-ב' נכונות. ג' לא נכונה ולכן תשובה ד' נכונה.

6.3. עבור גורם היוון 0.5,

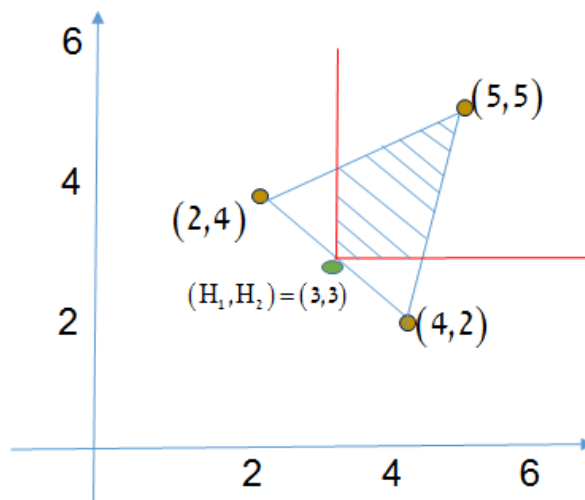
- א. קיים זוג אסטרטגיות שיביאו לתשלומים (4,5).
- ב. קיים זוג אסטרטגיות שיביאו לתשלומים (3.5,3.5).
- ג. קיים זוג אסטרטגיות שיביאו לתשלומים (2.5,2.5).
- ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

זוג האסטרטגיות היחיד שנמצא בשטח של F הוא (3.5,3.5)

6.4. קיים גורם היוון שעבורו,

- א. קיים זוג אסטרטגיות שיווי משקל שיביאו לתשלומים (3.5,3.5).
- ב. קיים זוג אסטרטגיות שיווי משקל שיביאו לתשלומים (4.5,4.5).
- ג. קיים זוג אסטרטגיות שיווי משקל שיביאו לתשלומים (4,6).
- ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

הסבר ל-6.3 ו-6.4, פתרון גרפי :



שאלה 1

נתון משחק בצורה נורמלית, 2 שחקנים. שחקן 1 בוחר שורה ושחקן 2 בוחר עמודה.

	$Y1$	$Y2$	$0.5, 0.5$	$0.55, 0.45$
$X1$	7, 8	8, 5	7.5, 6.5	7.45,
$X2$	6, 6	10, 8	8, 7	7.8,
$X3$	8, 5	7, 4	7.5, 4.5	7.55,
$(0, 1/3, 2/3)$	, 5.33	, 5.33		

בהמשך השאלה, הנח כי כל אסטרטגיה מעורבת לשחקן 1 תהיה מהצורה $p = (\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta)$ ועבור שחקן 2

מהצורה $q = (\gamma, \delta, 1 - \gamma - \delta)$.

ננתח את המשחק: ישנם 2 ש"מ, מסומים בצהוב. נבחר את $X2$ טהור.

1.1

א. $(0.5, 0, 0.5) \in BR_1((0.5, 0.5))$

ב. $(0.8, 0.2) \in BR_2((0, 1/3, 2/3))$

ג. $(0, 0, 1) \in BR_1((0.55, 0.45))$

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א' לא נכון, יעדיף לשחק $(0, 1, 0)$.

ב' נכון, האדישות בין $Y1$ ל- $Y2$ אומרת שכל ערבוב ביניהם הוא טוב.

ג' לא נכון, כיוון שיעדיף לשחק $(0, 1, 0)$.

1.2

א. זוג האסטרטגיות $(p = (0.5, 0, 0.5), q = (0.5, 0.5))$ הן שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

ב. קיים זוג אסטרטגיות מהצורה $(p = (\alpha, 0, 1 - \alpha), q = (\beta, 1 - \beta))$ כאשר $1 > \alpha > 0$ וגם

$1 > \beta > 0$, המהוות שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

ג. קיימת אסטרטגיה טהורה של שחקן 1 הנשלטת חזק ע"י אסטרטגיה מעורבת מסוימת שלו.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א ו-ב נפלו כבר בשאלה 1.1, כדי ששחקן 1 יערבב הוא צריך להיות אדיש ביניהם. אבל אז אסטרטגיה $X2$

היא הכי טובה.

נבדוק את ג': אף אסטרטגיה טהורה לא נשלטת ע"י טהורה אחרת. האם יש טהורה שנשלטת ע"י מעורבת.

המעומדת היא $X1$: קיימת אסטרטגיה כזאת: ערבוב בין $X2$ ל- $X3$. (למשל $(0.51, 0.49)$).

1.3

א. רמת הבטחון המשופרת (הטהורה) של שחקן 2 נמוכה מרמת הבטחון המשופרת (המעורבת) של שחקן

2.

ב. רמת הבטחון המשופרת (הטהורה) של שחקן 1 שווה לרמת הבטחון המשופרת (המעורבת) של שחקן 1.

ג. רמת הבטחון (הטהורה) של שחקן 2 נמוכה מרמת הבטחון (המעורבת) של שחקן 2.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

$$\begin{aligned} L_1 &= 7 \\ H_1 &= 8 \\ \left. \begin{aligned} L_2 &= 5 \\ H_2 &= 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow l_2 = h_2 = 5 \end{aligned}$$

א' ו-ג' נופלים, הכל שווה.

ב' – גבוהה $H_1 = 8 > h_1 = 7.8$, לא שווה ולכן נופל. מבצעים מיצוע בין ה-6 וה-10 לבין ה-8 וה-7.

שאלה 2

נתון משחק בצורה נורמלית (מטריצה) של שני שחקנים. לכל שחקן יש 3 אסטרטגיות טהורות. נתון כי $t = (0, 0.5, 0.5)$ היא אסטרטגיית רמת בטחון משופרת מעורבת של שחקן 1 ושל שחקן 2. מכך ניתן להסיק כי:

2.1

א. אם זוג האסטרטגיות (t, t) הן שיווי משקל מעורב, אז t אסטרטגיית רמת בטחון מעורבת של שחקן 1.

ב. אם זוג האסטרטגיות (t, t) הן שיווי משקל מעורב, אז $s = (0, 0, 1)$ אסטרטגיית רמת בטחון משופרת טהורה של שחקן 2.

ג. אם זוג האסטרטגיות (t, t) הן שיווי משקל מעורב, אז $(0, 0, 1) \in BR_2((0, 0, 1))$.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א- זו אסטרטגיית רמת ביטחון משופרת, השאלה אם היא אסטרטגיית רמת ביטחון רגילה

	D	E	F	$t = (0, 0.5, 0.5)$	(p_D, p_E, p_F)
A				$\beta, *$	
B				$\alpha, *$	
C				$\alpha, *$	
$t = (0, 0.5, 0.5)$	$\delta, *$	$\gamma, *$	$\gamma, *$	α, δ	

$$\alpha \geq \beta, \gamma \geq \delta$$

א' לא נכון. כל ערבוב אחר של (p_D, p_E, p_F) יתנו עמודה עם ערכים שלפחות אחד מהם גבוה מ- α , $\alpha = h_1$ (נתון ש- t הינה אסטרטגיית רמת ביטחון משופרת. גם עבור שחקן 2 $h_2 = \gamma$. לא ניתן להגיד כלום על אסטרטגיית רמת בטחון מעורבת (l_1, l_2) ב' לא נכון. יש ערבוב שהוא טוב כערבוב, לא ניתן להסיק מכך שהאסטרטגיות הטהורות שמעורבות בו הן אסטרטגיות טובות! יכולות להיות שזהו תמהיל לא טוב. (הערה: יש הרבה שאלות מסוג זה) ג' לא נכון. לא מתקיים בהכרח. ערבוב של $t = (0, 0.5, 0.5)$ טוב כנגד ערבוב של $t = (0, 0.5, 0.5)$ אך לא בהכרח טובה יותר מערבוב של הטהורות. נסכם: אין תשובה נכונה ולכן ד'.

2.2

א. אם $t = (0, 0.5, 0.5)$ היא אסטרטגיית רמת בטחון מעורבת של שחקן 2 ו- $t = (0, 0.5, 0.5)$ היא

אסטרטגיית רמת בטחון מעורבת של שחקן 1 אז זוג האסטרטגיות (t, t) הן שיווי משקל מעורב.

ב. אם $t = (0, 0.5, 0.5)$ היא אסטרטגיית רמת בטחון מעורבת של שחקן 2 אז $t = (0, 0.5, 0.5)$ היא

אסטרטגיית רמת בטחון מעורבת של שחקן 1.

ג. אם $t \in BR_1(t)$ אז זוג האסטרטגיות (t, t) הן שיווי משקל מעורב.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א' לא נכון- כל אחת מהאסטרטגיות משיגה את רמת הביטחון המשופרת המעורבת של כל שחקן ובנוסף משיגה את רמת הביטחון הרגילה של כל שחקן. השאלה אם זהו ש"מ מעורב. זה שאסטרטגית t רמת ביטחון מעורבת ל-1 גורר שהערבוב שבה יוצר שורה שבה הערך הנמוך ביותר גבוה מהערך הנמוך ביותר בכל עירוב אחר. אין מניעה ש β תהיה גדולה מ α .

ב'- ידוע שבמשחק של 2 שחקנים מתקיים $h_1 = 1$, כשנבחן את המקסימום ששחקן 2 משיג בשורה התחתונה שקבל את h_2 , כלומר: t של 1 משיגה את h_2 וגם להיפך: t של 2 משיגה את h_1 . כדי שבי יהיה נכון זה יהיה רק בגלל התכונה לעיל. אך גם זה לא קורה כאן: המידע הוא במישור התשלומים של שחקן 2 ושואלים על מישור התשלומים של שחקן 1- לכן ב' לא נכון!
ג'- לא בהכרח! (ייתכן וזהו לא ש"מ מעורב)

2.3

א. אם $q = (0, 1, 0)$ היא אסטרטגיית רמת בטחון משופרת טהורה של שחקן 1 אז $r = (0, 0, 1)$ היא

אסטרטגיית רמת בטחון משופרת טהורה של שחקן 1.

ב. $w = (1, 0, 0)$ אינה אסטרטגיית רמת בטחון משופרת טהורה של שחקן 2.

ג. $w = (1, 0, 0)$ אינה אסטרטגיית רמת בטחון טהורה של שחקן 1.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א', ב' ו-ג' לא נכונות- לא בהכרח, כיון שכטהורות יכול להיות שלא יתקיים. אין להסיק מאסטרטגיות מעורבות על אסטרטגיות טהורות. (יכול להיות למשל שהאסטרטגיה הראשונה היא הכי טובה כטהורה).

שאלה 3

שלושה שחקנים משחקים במשחק הבא: כל שחקן בוחר אחד מהמספרים 1, 2, 3, 4, 5.

נסמן ב- N_1, N_2, N_3 את המספרים שבחרו שחקנים 1, 2, 3 בהתאמה.

שחקן 1 יזכה ב-50 ש"מ אם $|N_1 - N_2| > |N_3 - N_2|$, אחרת יזכה ב-30 ש"מ.

שחקן 2 יזכה ב-40 ש"מ אם $|N_1 - N_3| > |N_3 - N_2|$, אחרת יזכה ב-30 ש"מ.

שחקן 3 יזכה ב-50 ש"מ אם $N_3 > N_2 > N_1$, אחרת יזכה ב-30 ש"מ.

הערה: ניתן לבחור את אותו המספר.

אין סיטואציה ש-3 השחקנים זוכים, אך לא אומר שאין ש"מ.

3.1. במשחק בו השחקנים בוחרים סימולטנית

א. קיימים (אם בכלל) פחות מ-5 שוויי משקל נאש באסטרטגיות טהורות.

ב. קיימים מעל 5 שוויי משקל נאש באסטרטגיות טהורות.

ג. קיימים מעל 20 שוויי משקל נאש באסטרטגיות טהורות.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

ישנן 125 אסטרטגיות (5^3)

"ידיון" עבור ש"מ: 2,1,4 הינו ש"מ, גם 2,1,5 הינו ש"מ וגם 2,1,3 ש"מ.

נראה עוד: 1,4,4 – לשחקנים 1 ו-2 אין שליטה על המשחק. שחקן 3 יעדיף 5 ולכן לא ש"מ אבל 1,5,5 כן ש"מ כי שחקן 3 לא יכול לשפר. 2,5,5 לא ש"מ כי שחקן 2 ירצה לסטות ל-1. 3,2,4 וגם 3,2,5 ש"מ, בשלב זה ניתן לראות שתשובה א' לא נכונה. 4,1,5 גם ש"מ.

3.2. במשחק בו השחקנים בוחרים סימולטנית

א. רמת הבטחון המשופרת (טהורה) של שחקן 3 שווה לרמת הבטחון (טהורה) של שחקן 3.

ב. לשחקן 2, האסטרטגיה של בחירת המספר 2 נשלטת חלש ע"י האסטרטגיה של בחירת המספר 3.

ג. לשחקן 1, האסטרטגיה של בחירת המספר 1 נשלטת חלש ע"י האסטרטגיה של בחירת המספר 2.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א. $H_3 \geq L_3$. נכון..

ב. באסטרטגיה 3,2,4 הבחירה של שחקן 2 יותר טובה מהבחירה של שחקן 3

$$|4-2| > |5-2| \quad (5,2,4) \rightarrow 50 \text{ good..}$$

$$|4-3| > |5-4| \quad (5,3,4) \rightarrow 30 \text{ bad..}$$

ג. נראה מתי הבחירה ב-1 יותר טובה מהבחירה ב-2, למשל: 1,1,2 (שחקן 1 יקבל 50) לעומת 2,1,2 (שחקן 1 יקבל 30)

$$|2-1| > |1-1| \quad (1,1,2) \rightarrow 50 \text{ good..}$$

$$|2-1| > |2-1| \quad (2,1,2) \rightarrow 30 \text{ bad..}$$

לסיכום, התשובה הנכונה היא א'.

3.3. במשחק בו השחקנים בוחרים באופן סדרתי (משחקן 1 שיבחר ראשון עד שחקן 3 שיבחר שלישי)

א. אם האסטרטגיה של שחקנים 1,2 היא תמיד לבחור את המספר 3, והאסטרטגיה של שחקן 3 הינה תמיד לבחור את המספר 5, נקבל שיווי משקל נאש.

ב. אם האסטרטגיה של שחקנים 1,3 היא תמיד לבחור את המספר 5, והאסטרטגיה של שחקן 2 הינה תמיד לבחור את המספר 1, נקבל שיווי משקל נאש.

ג. אם האסטרטגיה של שחקנים 1,2,3 היא תמיד לבחור ב-5, נקבל שיווי משקל נאש.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א' לא נכון: 2 יסטה לאסטרטגיה שלאחר בחירת '3' הוא בוחר '2' ב, לא נכון: בתנאי משחק בוחרים 5,1,5.. שחקן 1 רחוק מ-2 לא פחות ממה ש-3 רחוק מ-2. שחקן 1 ירצה לסטות למשל ל-4 ולכן לא נכון. ג' לא נכון: ראינו ש-5,5,5 לא ש"מ נאש, שחקן 2 יסטה למשל לכיוון 4.

3.4. במשחק בו השחקנים בוחרים באופן סדרתי (משחקן 1 שיבחר ראשון עד שחקן 3 שיבחר שלישי)

א. אם האסטרטגיה של שחקנים 1,2 היא תמיד לבחור את המספר 3, והאסטרטגיה של שחקן 3 הינה תמיד לבחור את המספר 5, נקבל שיווי משקל תת-משחק פרפקטי.

ב. אם האסטרטגיה של שחקנים 1,3 היא תמיד לבחור את המספר 5, והאסטרטגיה של שחקן 2 הינה תמיד לבחור את המספר 1, נקבל שיווי משקל תת-משחק פרפקטי.

ג. אם האסטרטגיה של שחקנים 1,2,3 היא תמיד לבחור ב-5, נקבל שיווי משקל תת-משחק פרפקטי.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

ראשית, כאשר המשחק מגיע לשחקן 3 ישנם מקרים רבים של אדישות כאשר שחקנים 1 ו-2 כבר שיבשו את הסדר. אלו לא ש"מ נאש ולכן גם לא ש"מ פרפקטי. א' לא נכון מכיוון שצורה לא נכון מכיוון שצורה *3,3 לא תיתן ניצחון לשחקן 2 ולכן לא יהיה מסלול טוב.. אלו סעיפים דומים לשאלה 3.3, שם ראינו שהן לא ש"מ ולכן גם לא ש"מ פרפקטי!

שאלה 5:

נתון שוק בו כל צרכן מעוניין בקניית יחידת מוצר אחת במחיר זול ככל האפשר. המחירים יכולים להיות שלמים או שליליים בלבד.

- 5.1. הנח כי בשוק 40 צרכנים וכן 2 יצרנים, ולכל אחד מהם עלות יצור של 50 ₪ ליחידה ועלויות קבועות של 70 ₪ (שישולמו רק במידה והיצרן מייצר בפועל). כל יצרן קובע מחיר בו הוא מחויב לספק כל כמות שתבוקש. הנח כי במידה והמחירים שיקבעו היצרנים יהיו זהים, הביקוש מתחלק באופן שווה בין היצרנים. מכאן,
- אם שני היצרנים קובעים מחיר 52, נקבל שווי משקל נאש.
 - קיים שווי משקל נאש יחיד.
 - כשיצרן מסוים קובע מחיר כלשהו, ליצרן המתחרה כדאי תמיד לקבוע מחיר נמוך ב-1.
 - אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

$$TC(q_i) = \begin{cases} 0 & q_i = 0 \\ 50q_i + 70 & > 0 \end{cases}$$

א' לא נכון, שניהם יפסידו כסף. כל אחד ימכור 20 יח' ברווח של 2 ₪ ליח', כלומר 60 ₪ סה"כ. אבל יש עלות קבועה של 70 ₪

ב' 54,54 לא ש"מ נאש כי אחד יכול לרדת ל-53 ואז יעלה לו פחות וזה יגרום לו להרוויח יותר (1.25 ₪ על 40 יח'). נראה אם קיים ש"מ נאש שבו 2 השחקנים מציעים אותו מחיר (55,55 והלאה לא...). לעומת זאת 53,52 ש"מ נאש (שחקן 1 מחוץ לשוק ואם יכנס הוא יפסיד), גם המקרה של 52,53 הוא ש"מ נאש וזה סותר את ב' (2 ש"מ ולא 1).

ג' לא נכון, למשל אחרי שירצן 1 קבע מחיר 52, אם שחקן 2 יקבע מחיר נמוך ב-1, כלומר 51 אזי הוא יפסיד!

אין תשובה נכונה ולכן ד'.

5.2. הנח כי בשוק 3 צרכנים ויצרן יחיד. היצרן מוציא 2 יחידות מוצר למכרו. כל צרכן יכול להציע מחיר שלם (גדול מ-0) באופן חד פעמי. שתי היחידות ימכרו לבסוף לצרכנים שיציעו את ההצעות הגבוהות ביותר וכל אחד מהם ישלם על יחידת המוצר מחיר השווה לגובה ההצעה הממוצעת של 3 הצרכנים (גם אם הממוצע לא שלם). במקרה ששני שחקנים כלשהם, או יותר, הציעו אותה הצעה, שחקן 1 לא יזכה במוצר, והאחרים יזכו. שווי המוצר עבור הצרכנים הינו $v_1 = 10, v_2 = 8, v_3 = 6$. מכאן,

א. שילוב ההצעות $b_1 = 4, b_2 = 3, b_3 = 2$ הינו שווי משקל נאש.

ב. שילוב ההצעות $b_1 = 14, b_2 = 2, b_3 = 2$ הינו שווי משקל נאש.

ג. שילוב ההצעות $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$ הינו שווי משקל נאש.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

א' לא נכון, שווה לשחקן 3 להציע 3 כך שהוא יזכה והתשלום יהיה $\frac{1}{3}$. ב' נכון, שחקנים 2 ו-3 ירוויחו, שחקן 1 הציע הצעה גבוהה ממה ששווה לו באמת לשלם ולכן טוב שלא זכה, אין ל-1 איך לשפר את ההצעה בהינתן שצרכנים 2 ו-3 הציעו הצעות זהות. ב' נכון. ג' לא נכון כי שווה לשחקן 3 להציע $b_3 = 1$ ואז תיקן ומכאן תשלום של $\frac{4}{3}$ לעו תשלום גובה הזכייה-3, כלומר נעשה כאן שיפור ולכן זהו לא ש"מ.

5.3. הנח כי בשוק 30 צרכנים וכן 2 יצרנים. יצרן 1 קובע מחיר שלם אי שלילי, לאחר מכן יצרן 2 יספק 20 יחידות או 10 יחידות או שלא יספק כלל. יצרן 1 מחויב לספק את כל יתרת הביקוש שלא סיפק יצרן 2. הנח כי ליצרן 1 עלות יצור של 10 ₪ ליח', ליצרן 2 עלות יצור של 20 ₪ ליח' (ועלות קבועה של 50 ₪ אותה ישלם במידה וייצר בפועל), וכי הצרכנים לא יקנו אם המחיר מעל 30 ₪ ליח'. מכאן,

א. בשיווי משקל תת-משחק פרפקטי יצרן 1 יקבע מחיר נמוך מ-20.

ב. קיים שיווי משקל נאש בו יצרן 1 יקבע מחיר 21.

ג. קיים שיווי משקל נאש בו יצרן 2 יספק 10 יחידות.

ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

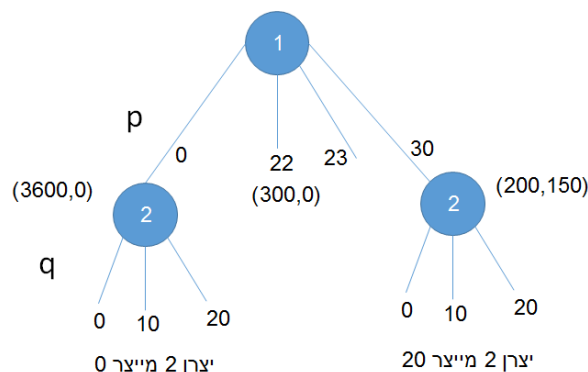
$$TC_2(q_2) = \begin{cases} 0 & q_2 = 0 \\ 20q_2 + 50 & q_2 > 0 \\ 22.5 & q_2 = 20 \end{cases}$$

במכל מקרה שיצרן 2 מציע 22 ומעלה יצרן 1 מייצר 20. יצרן 1 מפחד להציע 22 כי לפי האסטרטגיה של יצרן 2 הוא מייצר 20 אחריו. מכאן שתשובה א' לא נכונה, המחיר שיקבע יצרן 1 יהיה 22 (הנמוך ביותר). זוג האסטרטגיות:

$$\begin{pmatrix} p = 21, q_2 = 0 & p < 22 \\ q_2 = 20 & p \geq 22 \end{pmatrix}$$

מהווה ש"מ, התשלומים יהיו (330, 0). ולכן ב' נכון.

ג' לא נכון בשום מקרה (ראה עץ).



שאלה 6:

נתון המשחק החוזר האינסופי הבא:

	A	B
A	2, 10	1, 1
B	1, 1	10, 2

נתונות האסטרטגיות הבאות:

נסמן ב- X את האסטרטגיה הבאה: שחקן A בסיבוב הראשון. בכל סיבוב אחר, אם התשלום שלך בסיבוב הקודם גדול ממשך מ-3 אז המשך באותה פעולה אחרת החלף פעולה.

נסמן ב- Y את האסטרטגיה הבאה: שחקן ABABAB... כל עוד אין עדות שהיריב סטה מ-...ABABAB. אחרת שחקן A לנצח.

כנגד בחירת שחקן 1 ב- A שחקן 2 יכול לשחק A ואז הוא יקבל 10 – זה יטיב איתו.

6.1. עבור גורם היזון של 0.99,

א. $X \in BR_2(X)$

ב. $Y \in BR_1(Y)$

ג. $X \in BR_2(Y)$

ד. אין תשובה נכונה מהני"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהני"ל.

ראשית נשים לב שגורם ההיוון בבעיה גבוה מאד ולכן נתייחס לבעיה ללא תלות בזמן.
עבור א' נבנה את מהלך הפעולות וזרם התשלומים :

1: X: ABAB...

2: X: AABA...

2 1 1 1...

10 1 1 1...

עבור הזרם הני"ל נשאלת השאלה האם שחקן 2 עושה הכי טוב שהוא מסוגל, כלומר האם קיים זרם תשלומים טוב יותר? נשים לב שאם שחקן 2 סוטה ל-B משיג תשלומים טובים יותר :

1: X: ABBA...

2: X: ABA...

2 10 1 2...

10 2 1 10...

לכן תשובה א' לא נכונה (מצאנו זרם תשלומים טוב יותר ע"י סטיה של שחקן 2 ל-B), כלומר

$$X \notin BR_2(X)$$

עבור ב', נבנה את זרם התשלומים

1: Y: A B A B...

2: Y: A B A B...

2 10 2 10...

10 2 10 2...

זהו זרם התשלומים הטוב ביותר שנוכל להשיג עבור שחקן 1, אם הוא יסטה הוא יגרום לשחקן 2 לנצח

(ואז המצב לא משתפר..). כלומר זו התגובה האופטימלית $Y \in BR_1(Y)$ - תשובה נכונה.

עבור ג', זרם התשלומים :

1: Y: A B A A A A...

2: X: A A B A...

2 1 1 2 2 2...

10 1 1 10 10 10

נשפר את זרם התשלומים של שחקן 1 ע"י נקיטה באסטרטגיה A במהלך הזרם..

1: Y: A B A A A A...

2: X: A A A A...

2 1 2 2 2 2...

10 1 10 10 10 10

המצב השתפר ולכן זו לא הייתה התגובה האופטימלית, כלומר : $X \notin BR_2(Y)$

6.2. עבור גורם היוון של 0.99,

- א. זוג האסטרטגיות (X, X) הן שיווי משקל נאש.
- ב. זוג האסטרטגיות (Y, Y) הן שיווי משקל נאש.
- ג. זוג האסטרטגיות (X, Y) הן שיווי משקל נאש.
- ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

עבור א' וב' ראינו בסעיף הקודם שהן לא ש"מ נאש. נבדוק את ג' :

X:	A	B	B	...
Y:	A	B	A	A..
	2	10	1	2
	10	2	1	10

ניתן לסטות ולכן $X \notin BR_1(Y)$

6.3. עבור גורם היוון של 0.5,

- א. קיים זוג אסטרטגיות שיביאו לתשלומים $(1.5, 5)$.
- ב. קיים זוג אסטרטגיות שיביאו לתשלומים $(7, 7)$.
- ג. קיים זוג אסטרטגיות שיביאו לתשלומים $(4, 9)$.
- ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

6.4. קיים גורם היוון שעבורו,

- א. קיים זוג אסטרטגיות שיווי משקל שיביאו לתשלומים $(1.5, 5)$.
- ב. קיים זוג אסטרטגיות שיווי משקל שיביאו לתשלומים $(8, 6)$.
- ג. קיים זוג אסטרטגיות שיווי משקל שיביאו לתשלומים $(4, 7)$.
- ד. אין תשובה נכונה מהנ"ל או שיש יותר מתשובה אחת נכונה מהנ"ל.

